

Übungen zur Vorlesung „Logik II“

Aufgabe 25. Die Funktion $\text{Fib}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sei definiert durch

$$\text{Fib}(0) = 0,$$

$$\text{Fib}(1) = 1,$$

$$\text{Fib}(S(Sn)) = \text{Fib}(Sn) + \text{Fib}(n).$$

Ferner sei $L: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^3$ (mit $\mathbb{N}^3 := \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$) definiert durch

$$L(0) = (1, 0, 1),$$

$$L(Sn) = \text{Next}(Ln)$$

wobei $\text{Next}: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}^3$ definiert ist durch

$$\text{Next}(n_1, n_2, n_3) = (n_1 + n_2, n_2 + n_3, n_2).$$

(a) Beweisen Sie $L(n+1) = (a_{n+2}, a_{n+1}, a_n)$ mit $a_n := \text{Fib}(n)$.

(b) Definieren Sie L mit $\mathcal{R}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}^3}$.

Aufgabe 26. (a) Für die Algebra $\mathbb{P} := \mu_{\xi}(1: \xi, S_0: \xi \rightarrow \xi, S_1: \xi \rightarrow \xi)$ der positiven Zahlen (binär) definiere man Konstanten $\text{PosS}: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$, $\text{PosPred}: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$, $\text{PosPlus}: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$, und $\text{PosToNat}: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{N}$ durch Angabe von Berechnungsregeln, die dem Nachfolger, dem Vorgänger, der Summe und dem Umschreiben in \mathbb{N} entsprechen. Die Konstante Double kann verwendet werden.

(b) Für die Algebra $\mathbb{L}(\alpha) := \mu_{\xi}(\text{Nil}: \xi, \text{Cons}: \alpha \rightarrow \xi \rightarrow \xi)$ der Listen definiere man Konstanten $\text{Appd}: \mathbb{L}(\alpha) \rightarrow \mathbb{L}(\alpha) \rightarrow \mathbb{L}(\alpha)$, $\text{Rev}: \mathbb{L}(\alpha) \rightarrow \mathbb{L}(\alpha)$ und $\text{FoldL}: (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \alpha_1) \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \mathbb{L}(\alpha_2) \rightarrow \alpha_1$ durch Angabe von Berechnungsregeln, die dem Verketteten zweier Listen, dem Umdrehen einer Liste und dem „Falten nach links“ einer gegebenen Liste mit einer 2-stelligen Funktion und einem Anfangswert entsprechen.

Aufgabe 27. Für die Algebra $\mathbb{S}(\alpha) := \mu_{\xi}(\text{SCons}: \alpha \rightarrow \xi \rightarrow \xi)$ der Ströme definiere man Konstanten $\text{StrAppd}: \mathbb{L}(\alpha) \rightarrow \mathbb{S}(\alpha) \rightarrow \mathbb{S}(\alpha)$, $\text{StrProj}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{S}(\alpha) \rightarrow \alpha$ und $\text{StrBar}: \mathbb{S}(\alpha) \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{L}(\alpha)$ durch Angabe von Berechnungsregeln, die folgenden Operationen entsprechen.

- (i) Anhängen einer Liste vorne an einen Strom;
- (ii) Finden des n -ten Elements eines Stroms;
- (iii) Bilden des Anfangsstücks der Länge n eines Stroms.

Abgabe. Mittwoch, 16. Juni 2021.