Mathematisches Institut der LMU — Sommersemester 2021

Nils Köpp, Helmut Schwichtenberg — Blatt 6

Übungen zur Vorlesung „Logik II“

Aufgabe 21. $\boldsymbol{A} = (A, \mathrm{Con}_A, \vdash_A)$, $\boldsymbol{B} = (B, \mathrm{Con}_B, \vdash_B)$, $\boldsymbol{C}=(C, \mathrm{Con}_C, \vdash_C)$ seien Informationssysteme und $r \subseteq \mathrm{Con}_A \times B$, $s \subseteq \mathrm{Con}_B \times C$ approximierbare Abbildungen. Ferner seien $f\colon |\boldsymbol{A}| \to |\boldsymbol{B}|$ und $g\colon |\boldsymbol{B}| \to |\boldsymbol{C}|$ stetig. Beweisen Sie

(a) $s \circ r := \{\, (U, c) \mid \exists_V ((U, V) \subseteq r \text{ und } (V, c) \in s) \,\}$ ist eine approximierbare Abbildung (wobei $(U, V) := \{\, (U, b) \mid b \in V \,\}$).

(b)
$$|s \circ r| = |s| \circ |r|, \qquad \widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}.$$

Aufgabe 22. (a) Geben Sie zu der Algebra $\mathbb{P} := \mu_\xi(\xi, \xi \to \xi, \xi \to \xi)$ der (binären) positiven Zahlen mit Konstruktoren $1^{\mathbb{P}}$, $S_0^{\mathbb{P}\to\mathbb{P}}$, $S_1^{\mathbb{P}\to\mathbb{P}}$ das Informationssystem $\boldsymbol{C}_{\mathbb{P}}$ durch seine Bestandteile $C_{\mathbb{P}}$, $\mathrm{Con}_{\mathbb{P}}$ und $\vdash_{\mathbb{P}}$ an.

(b) Wie sind die approximierende Abbildung r_{S_i} und die Werte $|r_{S_i}|(z)$ der zugehörigen stetigen Funktion von $|\mathbb{P}|$ nach $|\mathbb{P}|$ definiert?

(c) Beweisen Sie, daß $|r_{S_i}|$ injektiv ist, und daß die Wertebereiche von $|r_{S_0}|$ und $|r_{S_1}|$ disjunkt sind.

(d) Geben Sie je ein flaches Informationssystem an, in dem (i) nicht alle Konstruktoren injektiv sind und (ii) die Konstruktoren keine disjunkten Wertebereiche haben. (Beipiel für ein flaches Informationssystem: die Informationsatome a von $\mathbb{P}_{\mathsf{flach}}$ sind alle $S_{i_0} S_{i_1} \dots S_{i_{n-1}} 1$, die konsistenten Mengen U alle Einermengen $\{a\}$ sowie die leere Menge $\emptyset$, und die Folgerungsrelation $U \vdash a$ ist definiert durch $a \in U$).

Aufgabe 23. Definieren Sie

(a) die Funktion $A\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{N}$ die jedem binären Baum t die Anzahl seiner Blätter zuordnet (i) durch Berechnungsregeln und (ii) mit $\mathcal{R}_{\mathbb{Y}}^{\mathbb{N}}$,

(b) das unendliche Ideal NatInf vom Typ $\mathbb{N}$ (i) durch Berechnungsregeln und (ii) mit ${}^{\mathrm{co}}\mathcal{R}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{N}}$.

Abgabe. Mittwoch, 9. Juni 2021.