Mathematisches Institut der LMU
Nils Köpp, Helmut Schwichtenberg

Sommersemester 2021
Blatt 5

Übungen zur Vorlesung „Logik II“

Aufgabe 17. Für Aussagenvariablen P, Q betrachte man die Formeln

$$\begin{aligned} \mathrm{Peirce}_{P,Q} &:= ((P \to Q) \to P) \to P, \\ \mathrm{Ef}_P &:= \bot \to P, \\ \mathrm{Stab}_P &:= \neg\neg P \to P. \end{aligned}$$

Geben Sie Herleitungen für die folgenden Formeln an, und zwar jeweils als Herleitungsbaum und als Herleitungsterm.

(a) $\mathrm{Stab}_P \to \mathrm{Ef}_Q \to \mathrm{Peirce}_{P,Q}$,
(b) $\mathrm{Peirce}_{P,\bot} \to \mathrm{Ef}_P \to \mathrm{Stab}_P$.

Aufgabe 18. Ein Informationssystem $\boldsymbol{A} = (A, \mathrm{Con}, \vdash)$ heißt *kohärent* wenn es folgende Eigenschaft hat: $U \subseteq A$ ist konsistent genau dann, wenn es alle seine zweielementigen Teilmengen sind. Zeigen Sie, daß aus der Kohärenz von $\boldsymbol{B}$ die Kohärenz von $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ folgt.

Aufgabe 19. Die β-Konversion für Herleitungsterme ist definiert durch $(\lambda_u M(u))N \mapsto_\beta M(N)$, und die „Ein-Schritt-Reduktion“ $M \rightharpoonup N$ durch

(i) Wenn $M \mapsto_\beta M'$, so $M \rightharpoonup M'$.
(ii) Wenn $M \rightharpoonup M'$, so auch $MN \rightharpoonup M'N$, $NM \rightharpoonup NM'$, $\lambda_v M \rightharpoonup \lambda_v M'$

Ferner sei eine Relation $\mathrm{sn}(M, k)$ zwischen Termen M und natürlichen Zahlen k definiert durch

$$\begin{aligned} \mathrm{sn}(M, 0) &:= M \text{ ist in Normalform}, \\ \mathrm{sn}(M, k+1) &:= \mathrm{sn}(M', k) \text{ für alle } M' \text{ mit } M \rightharpoonup M'. \end{aligned}$$

(Ein Term heißt in „Normalform“ wenn er keinen Teilterm der Gestalt $(\lambda_u M(u))N$ enthält). Inhaltlich bedeutet $\mathrm{sn}(M, k)$ daß k eine obere Schranke für die Anzahl der Konversionsschritte bis zur Normalform ist.

(a) Beweisen Sie
  (i) $\mathrm{sn}(u, 0)$.
  (ii) Wenn $\mathrm{sn}(M, k)$, so $\mathrm{sn}(\lambda_u M, k)$.
  (iii) Wenn $\mathrm{sn}(M, k)$ und $\mathrm{sn}(N, j)$, so $\mathrm{sn}(MN, k + j)$.

  Folgern Sie, daß es für jeden Term M eine obere Schranke für die Anzahl der Konversionsschritte bis zur Normalform gibt
(b) Geben Sie einen Algorithmus an, der Derivationen (also $M \in \mathrm{Der}$) normalisiert. (Hinweis: SN.)

Abgabe. Mittwoch, 26. Mai 2021.