Mathematisches Institut der LMU
Nils Köpp, Helmut Schwichtenberg

Sommersemester 2021
Blatt 4

Übungen zur Vorlesung „Logik II“

Aufgabe 13. Beweisen Sie $\vdash_c \tilde{\exists}_x(Px \to \forall_x Px)$ (zu lesen als: in jeder nicht leeren Bar muß es eine Person x geben mit der Eigenschaft: wenn x trinkt, so trinken alle) durch Angabe einer *normalen* (d.h. umwegfreien) Herleitung. Schreiben Sie die Herleitung auch als Herleitungsterm.

Aufgabe 14. Sei $\boldsymbol{A} = (A, \mathrm{Con}, \vdash)$ ein Informationssystem und $U \in \mathrm{Con}$. Wir definieren $\mathcal{O}_U \subseteq |\boldsymbol{A}|$ durch

$$\mathcal{O}_U := \{\, x \in |\boldsymbol{A}| \mid U \subseteq x \,\}.$$

Man beweise:

(a) Das System aller $\mathcal{O}_U$ mit $U \in \mathrm{Con}$ bildet die Basis einer Topologie auf $|\boldsymbol{A}|$ (die „Scott-Topologie“).

(b) Für $\mathcal{O} \subseteq |\boldsymbol{A}|$ sind folgende Aussagen äquivalent.
   (i) $\mathcal{O}$ ist offen in der Scott-Topologie.
   (ii) $\mathcal{O}$ erfüllt
      (1) Wenn $x \in \mathcal{O}$ und $x \subseteq y$, so $y \in \mathcal{O}$ (Alexandrov Bedingung).
      (2) Wenn $x \in \mathcal{O}$, so $\overline{U} \in \mathcal{O}$ für ein $U \subseteq x$ (Scott Bedingung).
   (iii) $\mathcal{O} = \bigcup_{\overline{U} \in \mathcal{O}} \mathcal{O}_U$.

Aufgabe 15. Es seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ Informationssysteme und $f\colon |\boldsymbol{A}| \to |\boldsymbol{B}|$. Dann sind äquivalent:

(a) f ist stetig bzgl. der Scott-Topologie.

(b) f ist monoton und erfüllt das Prinzip des endlichen Trägers PFS: wenn $b \in f(x)$, so ist $b \in f(\overline{U})$ für ein $U \subseteq x$.

Abgabe. Mittwoch, 19. Mai 2021.