Mathematisches Institut der LMU
Nils Köpp, Helmut Schwichtenberg

Übungen zur Vorlesung „Logik II“

Aufgabe 5. Geben Sie Herleitungen an für

$$(A \lor B \to C) \leftrightarrow (A \to C) \land (B \to C),$$
$$(A \to B) \lor (A \to C) \to (A \to B \lor C).$$

Aufgabe 6. Geben Sie Herleitungen an für

$$\exists_x (A \to B) \to \forall_x A \to B \quad \text{falls } x \notin \mathrm{FV}(B),$$
$$(A \to \forall_x B) \leftrightarrow \forall_x (A \to B) \quad \text{falls } x \notin \mathrm{FV}(A),$$
$$(\exists_x A \to B) \leftrightarrow \forall_x (A \to B) \quad \text{falls } x \notin \mathrm{FV}(B).$$

Aufgabe 7. (a) Zeigen Sie, daß die Einführungs- und Beseitigungsaxiome für die Konjunktion

$$\land^+ \colon A \to B \to A \land B, \qquad \land^- \colon A \land B \to (A \to B \to C) \to C$$

äquivalent sind zu den Regeln

$$\dfrac{\begin{matrix} \mid M \\ A \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \mid N \\ B \end{matrix}}{A \land B}\ \land^+ \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} \\ \mid M \\ A \land B \end{matrix} \qquad \begin{matrix} [u\colon A] \quad [v\colon B] \\ \mid N \\ C \end{matrix}}{C}\ \land^-\, u, v$$

(b) Zeigen Sie, daß die Einführungs- und Beseitigungsaxiome für den Existenzquantor

$$\exists^+ \colon A \to \exists_x A, \qquad \exists^- \colon \exists_x A \to \forall_x (A \to B) \to B \quad (x \notin \mathrm{FV}(B)).$$

äquivalent sind zu den Regeln

$$\dfrac{t \qquad \begin{matrix} \mid M \\ A(t) \end{matrix}}{\exists_x A(x)}\ \exists^+ \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} \\ \mid M \\ \exists_x A \end{matrix} \qquad \begin{matrix} [u\colon A] \\ \mid N \\ B \end{matrix}}{B}\ \exists^- x, u \text{ (Var.Bed.)}$$

wobei die Regel $\exists^- x, u$ folgende Eigenvariablen-Bedingung erfüllen muß: in der Herleitung N kommt die Variable x (i) nicht frei vor in offenen Annahmen außer $u\colon A$, und (ii) nicht frei vor in B. (Hinweis: Axiome – z.B. $\exists^+$ – sind immer als außen allquantifiziert zu verstehen.)

Abgabe. Mittwoch, 5. Mai 2021