

Kapitel VIII.

Euklidische und unitäre Vektorräume, Hilberträume, und mehr an Geometrie

Einleitung

In diesem Kapitel werden geometrische Aspekte aus den vorangegangenen Paragraphen wieder aufgenommen, zusammengeführt und weiterentwickelt. Dabei stützen wir uns auf die geometrisch orientierten Motivationen zu Beginn der Vorlesung, auf die Ansätze zur euklidischen Geometrie aus dem 11. Paragraphen, auf die Resultate zu Bilinearformen aus dem Paragraphen 25 und auf die Untersuchungen zu orthogonalen Abbildungen und euklidischer Geometrie aus dem Paragraphen 30 und aus dem Kapitel VI.

Die genannten geometrischen Aspekte werden unter Verwendung der bislang entwickelten Resultate (unter anderem über Matrizen, Determinanten, Eigenwerte) wiederholt und weitergeführt. Die Weiterführung betrifft vor allem verschiedene Vorbereitungen für Anwendungen in der Physik.

Zum Beispiel beweisen wir den Satz über die Hauptachsentransformation und kommen damit auf den Trägheitstensor zurück (vgl. §36). Weiterhin gehen wir auf orthogonale Projektionen in reellen (euklidischen) und in komplexen (unitären) Vektorräumen, also in (Prä-) Hilberträumen, ein und auf den Bra–Ket–Formalismus als Vorbereitung für die Quantenmechanik. Ebenfalls für die Quantenmechanik werden in diesem Zusammenhang Resultate zum Spektralsatz (Paragraf 46) behandelt, und es werden natürliche Konstruktionen wie der projektive Raum eines Vektorraumes und das Tensorprodukt von Vektorräumen und von Hilberträumen eingeführt. Wir studieren auch kurz die symplektische Geometrie für die Hamiltonsche Formulierung der Klassischen Mechanik mit einem Ausblick auf die Quantenmechanik (kanonische Quantisierung).

Ein gewisser Höhepunkt an Relevanz und auch an Schwierigkeit stellt der Spektralsatz in §46 dar. An diese wichtige Aussage tastet wir uns schrittweise heran, unter beabsichtigter Inkaufnahme von Wiederholungen und mit Ähnlichkeiten im Aufbau der Paragraphen: Erst der endlichdimensionale euklidische (d.h. reelle) Fall (§41, 42) als Hauptachsentransformation, dann der endlichdimensionale unitäre (d.h. komplexe) Fall (§43, 44) als Spektralzerlegung normaler Operatoren, und dann der unendlichdimensionale Fall einheitlich für reelle und komplexe Hilberträume (§45, 46). Der Spektralsatz wird allerdings nicht in der vollen Allgemeinheit behandelt, der wichtige Fall unbeschränkter selbstadjungierter Operatoren bleibt außen vor.

Die Paragraphen im einzelnen:

§ 41 Euklidische Vektorräume

§ 42 Hauptachsentransformation

§ 43 Unitäre Vektorräume

§ 44 Spektralzerlegung normaler Operatoren im endlichdimensionalen Fall

§ 45 Hilberträume

§ 46 Selbstadjungierte lineare Operatoren auf einem Hilbertraum

§ 47 Projektive Geometrie und projektive Räume

§ 48 Symplektische Geometrie und Klassische Mechanik

§ 49 Das Tensorprodukt von Vektorräumen und Hilberträumen

Der Grundbegriff für die Art von Geometrien, die in diesem Kapitel eine Rolle spielen, ist der Begriff der Bilinearform auf dem jeweiligen Vektorraum V . Das trifft auf den Fall endlicher Dimension wie auch auf den Fall unendlicher Dimension zu.

Im Falle $\dim V = n$ gilt nach 25.7 im Falle $\text{char}(K) \neq 2$ das folgende Resultat. (Dieses Resultat wird anderswo auch der Trägheitssatz von Sylvester genannt.) Zu jeder symmetrische Bilinearform σ gibt es eine

Basis $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ von V , bezüglich der σ eine Matrixdarstellung mit einer Diagonalmatrix hat:

$$(\sigma_{\mu\nu}) = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_r, 0, \dots, 0),$$

wobei r der Rang von σ ist. Es gilt also

$$\sigma(x, y) = \sum_{\nu=1}^r d_\nu x^\nu y^\nu$$

für $x = x^\mu b_\mu$ und $y = y^\nu b_\nu$.

Für reelle Vektorräume können die Diagonalelemente aus der Menge $\{+1, -1, 0\}$ gewählt werden, also

$$(\sigma_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0),$$

dabei tritt die 1 p -fach auf, die -1 tritt q -fach auf und es ist $r = p + q$. Entsprechendes gilt auf komplexen Vektorräumen endlicher Dimension für symmetrische $\mathbb{R}$ -Bilinearformen, die in einem Argument komplex-linear und in dem anderen komplex-antilinear sind (das sind die hermiteschen Bilinearformen, vgl. §43).

Für komplexe endlichdimensionale Vektorräume können für die symmetrischen $\mathbb{C}$ -Bilinearformen die Diagonalelemente aus der Menge $\{+1, 0\}$ gewählt werden, also

$$(\sigma_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0).$$

Diese Resultate liefern im Endlichdimensionalen einen guten Überblick über die möglichen symmetrischen, nichtausgearteten Bilinearformen und damit über die möglichen (symmetrischen oder auch hermiteschen) Geometrien.

Im antisymmetrischen und zugleich nichtausgearteten Fall haben wir ebenfalls eine „Standardform“ der darstellenden Matrix. Auf die symplektische Geometrie gehen wir im Paragraphen 48 kurz ein.

Bei unendlichdimensionalen Vektorräumen mit einer ausgezeichneten Bilinearform als Geometrie kommen als neue wichtige Bestandteile der Theorie noch Konvergenzbetrachtungen und Stetigkeitsfragen hinzu (und damit verlassen wir das eigentliche Areal der Linearen Algebra und machen die ersten Schritte in Richtung Funktionalanalysis). Das wird in Paragraph 45 dargestellt, wirkt sich auf die Untersuchungen zum Spektralsatz in §46 aus und hat auch seine Bedeutung für das Tensorprodukt von unendlichdimensionalen Hilberträumen in §49.