

§49 Tensorprodukt

Zusammenfassung

Das Tensorprodukt von Vektorräumen erlaubt die „Linearisierung“ von bilinearen und multilinearen Abbildungen zwischen Vektorräumen. Varianten des Tensorproduktes sind das äußere Produkt bzw. das symmetrische Produkt, mit denen sich alternierende bzw. symmetrische multilineare Abbildungen linearisieren lassen. Das Tensorprodukt und seine Varianten werden benötigt in der Darstellungstheorie von Gruppen, insbesondere von Symmetriegruppen der Physik, und zur Konstruktion von Fock-Räumen in der Quantenmechanik und in der Quantenfeldtheorie.

Wir beginnen mit einem Beispiel:

(49.1) Beispiel: Es seien die Vektorräume \mathbb{R}^m und \mathbb{R}^n mit ihren Standardbasen (e_i) und (e_j) (mit $e_i = (\delta_i^k)$) gegeben. Der Vektorraum \mathbb{R}^{mn} hat die Standardbasis $(e_k)_{1 \leq k \leq mn}$. Zu jedem $k \in \{1, 2, \dots, mn\}$ gibt es nach dem euklidischen Algorithmus eindeutig bestimmte $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ und $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $k = (i-1)m + j$. Wir setzen nun $t_{ij} := e_k$, falls $k = (i-1)m + j$. $(t_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ ist die Basis $(e_k)_{1 \leq k \leq mn}$ von \mathbb{R}^{mn} mit einer anderen Indizierung der Basiselemente. Wir definieren eine natürliche Abbildung

$$\otimes : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{mn}, (x^i e_i, y^j e_j) \longmapsto x^i y^j t_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x^i y^j t_{ij}.$$

Diese Abbildung ist offensichtlich bilinear. Sie hat außerdem die folgende universelle Eigenschaft:

Zu jeder bilinearen Abbildung $\beta : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$ in einen \mathbb{R} -Vektorraum E gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\hat{\beta} : \mathbb{R}^{mn} \rightarrow E$ mit der Faktorisierung $\beta = \hat{\beta} \circ \otimes$, nämlich $\hat{\beta}(z^{ij} t_{ij}) := z^{ij} \beta(e_i, e_j)$:

$$\hat{\beta} \circ \otimes(x^i e_i, y^j e_j) = \hat{\beta}(x^i y^j t_{ij}) = x^i y^j \beta(e_i, e_j) = \beta(x^i e_i, y^j e_j).$$

$\hat{\beta}$ ist tatsächlich eindeutig bestimmt, denn wegen $\otimes(e_i, e_j) = t_{ij}$ muss ja $\hat{\beta}(t_{ij}) = \beta(e_i, e_j)$ gelten, und eine lineare Abbildung ist bekanntlich durch ihre Werte auf einer Basis festgelegt.

Wir können diese universelle Eigenschaft auch mit einem „neuen“ Raum $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n$ realisieren, den wir wie folgt konstruieren: Es wird eine indizierte Menge $\{e_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ ausgezeichnet, und mit $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n$ wird der Raum aller (per definitionem linear unabhängigen) Linearkombinationen $z^{ij} e_{ij}$, $z^{ij} \in \mathbb{R}$, bezeichnet (mit der üblichen Summenkonvention $z^{ij} e_{ij} := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n z^{ij} e_{ij}$). Dann ist (e_{ij}) Basis von $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n$, und mit der Definition

$$\otimes(x^i e_i, y^j e_j) := x^i y^j e_{ij}$$

ist eine bilineare Abbildung $\otimes : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n$ mit der oben stehenden universellen Eigenschaft definiert.

Offensichtlich kann der so konstruierte Vektorraum mit dem Raum der reellen $m \times n$ -Matrizen identifiziert werden.

Im übrigen ist $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n$ isomorph zu \mathbb{R}^{mn} als \mathbb{R} -Vektorraum vermöge $e_{ij} \mapsto t_{ij}$ und hat die Dimension mn .

(49.2) Definition: Zu zwei Vektorräumen V und W über einem Körper K ist das *Tensorprodukt* gegeben durch einen K -Vektorraum $V \otimes W$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes W$ mit der folgenden universellen Eigenschaft:

Zu jeder bilinearen Abbildung $\beta : V \times W \rightarrow E$ in einen K -Vektorraum E gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\hat{\beta} : V \otimes W \rightarrow E$ mit $\beta = \hat{\beta} \circ \otimes$.

Bemerkung: Wenn klargestellt werden muss, dass sich die Abbildung \otimes auf die Vektorräume V und W bezieht, wird $\otimes_{V,W}$ anstelle von \otimes geschrieben.

Für $V = \mathbb{R}^m$ und $W = \mathbb{R}^n$ habe wir bereits die Existenz des Tensorprodukts bewiesen:

(49.3) Satz: Das Tensorprodukt $\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes W$ zu zwei K -Vektorräumen V, W existiert stets, und es ist im folgenden Sinne bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt: Ist $\otimes' : V \times W \rightarrow (V \otimes W)'$ ein weiteres Tensorprodukt, so gibt es einen Vektorraumisomorphismus $\Psi : V \otimes W \rightarrow (V \otimes W)'$ mit $\otimes' = \Psi \circ \otimes$.

Beweis: Zunächst folgt aus der universellen Eigenschaft, dass die Bildmenge $\otimes(V \times W) \subset V \otimes W$ den Vektorraum $V \otimes W$ im Falle der Existenz erzeugt, denn sonst wäre $\hat{\beta}$ nicht eindeutig bestimmt.

Die Eindeutigkeit (bis auf Isomorphie) des Tensorproduktes folgt ebenfalls aus der universellen Eigenschaft von $\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes W$ bzw. von \otimes' : Weil \otimes' bilinear ist, gibt es die lineare Abbildung $\hat{\otimes}' : V \otimes W \rightarrow V \otimes' W$ mit $\otimes' = \hat{\otimes}' \circ \otimes$. Deshalb ist $\hat{\otimes}'$ ein Kandidat für Ψ . Wegen der universellen Eigenschaft von $\otimes' : V \times W \rightarrow (V \otimes W)'$ haben wir auch $\otimes = \hat{\otimes} \circ \otimes'$. Also gilt mit $\Psi := \hat{\otimes}'$ und $\Phi := \hat{\otimes}$:

$$\otimes = \Phi \circ \Psi \circ \otimes \quad \text{und} \quad \otimes' = \Psi \circ \Phi \circ \otimes'.$$

Weil die Bildmengen $\otimes(V \times W)$ und $\otimes'(V \times W)$ Erzeugendensysteme sind, folgt $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{V \otimes W}$ und $\Psi \circ \Phi = \text{id}_{V \otimes' W}$. Also ist Ψ Vektorraumisomorphismus mit Umkehrabbildung Φ .

Zur Existenz: Mit Hilfe von (gegebenenfalls unendlichen) Basen von V und W lässt sich der Existenzbeweis genau wie oben führen: b sei Basis von V , c von W ; dann ist $V \otimes W := K^{(b \times c)}$ Tensorprodukt.

Wir geben hier einen alternativen „natürlichen“ Existenzbeweis an, der die Existenz von Basen nicht voraussetzt. Zum Produktraum $V \times W$ betrachte man dazu die (Kronecker-) Abbildung $\delta : V \otimes W \rightarrow K^{(V \times W)}$ in den Vektorraum $K^{(V \times W)}$ aller

Abbildungen von $V \times W$ nach K mit endlichen Träger:

$$\delta(v, w)(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (v, w) = (x, y) \\ 0, & \text{wenn } (v, w) \neq (x, y) \end{cases}$$

Um die Abbildung δ „bilinear zu machen“, betrachte man den Untervektorraum $N \subset \mathbb{K}^{(V \times W)}$, der von allen Vektoren der Form $\delta(\lambda v + v', w) - \lambda \delta(v, w) - \delta(v', w)$ und $\delta(v, \lambda w + w') - \lambda \delta(v, w) - \delta(v, w')$ erzeugt wird, wobei $v, v' \in V$, $w, w' \in W$, $\lambda \in K$. Es sei $V \otimes W$ der Quotientenraum $K^{(V \times W)}/N$ mit der kanonischen Projektion $\pi : K^{(V \times W)} \rightarrow V \otimes W$. Dann ist die Abbildung $\otimes := \pi \circ \delta : V \times W \rightarrow V \otimes W$ bilinear, wie man leicht nachprüft, denn so wurde der Unterraum N ja gerade gewählt. Damit ist das Tensorprodukt (bis auf Isomorphie) konstruiert:

Denn zu einer bilinearen Abbildung $\beta : V \times W \rightarrow E$ ist zunächst $\check{\beta} : K^{(V \times W)} \rightarrow Z$ durch $\check{\beta}(\delta(v, w)) := \beta(v, w)$ als lineare Abbildung durch lineare Fortsetzung wohldefiniert, da $(\delta(v, w))_{(v, w) \in V \times W}$ eine Basis von $K^{(V \times W)}$ ist. Es gilt natürlich $\check{\beta} \circ \delta = \beta$. Für $n \in N$ ist außerdem $\check{\beta}(n) = 0$, weil β bilinear ist. Zum Beispiel im Falle $n = \delta(\lambda v + v', w) - \lambda \delta(v, w) - \delta(v', w)$:

$$\begin{aligned} \check{\beta}(n) &= \check{\beta}(\delta(\lambda v + v', w) - \lambda \delta(v, w) - \delta(v', w)) \\ &= \check{\beta}(\delta(\lambda v + v', w)) - \lambda \check{\beta}(\delta(v, w)) - \check{\beta}(\delta(v', w)) && \text{span} \\ &= \beta(\lambda v + v', w) - \lambda \beta(v, w) - \beta(v', w) = 0. \end{aligned}$$

Weil also $\check{\beta}$ auf N verschwindet, ist die Abbildung $\hat{\beta} : V \times W \rightarrow Z$ durch $\hat{\beta}(x) := \check{\beta}(y)$ für $x \in V \otimes W$ mit $x = \pi(y)$, $y \in K^{(V \times W)}$, wohldefiniert und linear, und es ist $\hat{\beta} \circ \pi = \check{\beta}$. Offensichtlich gilt die gewünschte Faktorisierung $\beta = \hat{\beta} \circ \otimes : \hat{\beta} \circ \otimes = \hat{\beta} \circ \pi \circ \delta = \check{\beta} \circ \delta = \beta$. Außerdem ist $\hat{\beta}$ durch diese Faktorisierung eindeutig bestimmt wegen $\hat{\beta}(\otimes(v, w)) = \beta(v, w)$ für $(v, w) \in V \times W$ und der Tatsache, dass das Bild $\otimes(V \times W)$ den Raum $V \otimes W = K^{(V \times W)}/N$ erzeugt.

(49.4) Korollar: Jeder Vektor $t \in V \otimes W$ hat eine Darstellung als endliche Summe $t = \sum_{i=1}^{i=m} v_i \otimes w_i$ mit $v_i \in V, w_i \in W$. Die Darstellung ist (in der Regel) nicht eindeutig.

Das ergibt sich sofort aus der Tatsache, dass das Bild $\otimes(V \times W)$ den Raum $V \otimes W$ erzeugt.

(49.5) Satz: Für zwei K -Vektorräume V, W sind $V \otimes W$ und $W \otimes V$ in kanonischer Weise isomorph mit dem durch $v \otimes w \mapsto w \otimes v$ für $(v, w) \in V \times W$ gegebenen Isomorphismus.

Beweis: „kanonisch“ bedeutet im ersten Fall, dass die Isomorphie durch die kanonische Vertauschungsabbildung $\sigma : V \times W \rightarrow W \times V$, $(v, w) \mapsto (w, v)$ gegeben ist: $\beta := \otimes_{W, V} \circ \sigma : V \times W \rightarrow W \otimes V$ ist bilinear, daher gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\hat{\beta} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$ mit $\otimes_{W, V} \circ \sigma = \beta = \hat{\beta} \circ \otimes_{V, W}$. Es ist $\hat{\beta}(v \otimes w) = w \otimes v$ für $(v, w) \in V \times W$, und $\hat{\beta}$ ist der angesprochene Isomorphismus. Dass $\hat{\beta}$ bijektiv ist, sieht man direkt durch Einsetzen, durch Angabe der Inversen

$w \otimes v \mapsto v \otimes w$ oder durch die universelle Eigenschaft, die bei vertauschten Rollen von V und W die Inverse zu $\hat{\beta}$ als $\hat{\lambda}$ zu $\lambda := \otimes_{V,W} \circ \sigma^{-1}$ liefert.

(49.6) Satz: Ebenso hat man die folgenden kanonischen Isomorphismen (für drei K -Vektorräume V_1, V_2, V_3):

$$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3),$$

gegeben durch $(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \mapsto v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$.

$$(V_1 \oplus V_2) \otimes V_3 \cong (V_1 \otimes V_3) \oplus (V_2 \otimes V_3),$$

gegeben durch $(v_1 \oplus v_2) \otimes v_3 \mapsto (v_1 \otimes v_3) \oplus (v_2 \otimes v_3)$.

$$V_1^* \otimes V_2^* \cong (V_1 \otimes V_2)^*,$$

gegeben durch $\mu_1 \otimes \mu_2 \mapsto (v_1 \otimes v_2 \mapsto \mu_1(v_1) \otimes \mu_2(v_2))$.

$$V_1 \otimes K \cong V_1 \cong K \otimes V_1,$$

gegeben durch $v \otimes \lambda \mapsto \lambda v$ und $v \mapsto 1 \otimes v$.

Beweise analog zum Beweis von 49.5.

(49.7) Satz: Für lineare Abbildungen $A \in \text{Hom}(V, X)$ und $B \in \text{Hom}(W, Y)$ ist durch $v \otimes w \mapsto Av \otimes Bw$ für $v \in V, w \in W$ eine lineare Abbildung $A \otimes B \in \text{Hom}(V \otimes W, X \otimes Y)$ gegeben. Es gilt für weitere lineare Abbildungen C bzw. D mit Quelle X bzw. Y stets: $(C \otimes D) \circ (A \otimes B) = (C \circ A) \otimes (D \circ B)$. Insbesondere gilt für Isomorphismen A und B stets: $A \otimes B$ ist invertierbar mit Inverser $A^{-1} \otimes B^{-1}$.

Beweis: Die Existenz von $A \otimes B$ kann man zeigen, indem man beweist, dass die Definition $(A \otimes B)(\sum_{i=1}^{i=m} v_i \otimes w_i) := \sum_{i=1}^{i=m} A(v_i) \otimes B(w_i)$ wohldefiniert ist, also unabhängig von der jeweiligen Darstellung $t = \sum_{i=1}^{i=m} v_i \otimes w_i$ von $t \in V \otimes W$, vgl. 49.4. Dann ist $A \otimes B$ offensichtlich linear, und die weiteren Behauptungen folgen sofort durch Einsetzen. Die Existenz kann auch mit der universellen Eigenschaft gezeigt werden, denn die Abbildung $\beta : V \times W \rightarrow X \otimes Y$, $\beta(v, w) := Av \otimes Bw$, für $(v, w) \in V \times W$ ist unmittelbar bilinear, also existiert die lineare Abbildung $A \otimes B := \hat{\beta} : V \otimes W \rightarrow X \otimes Y$ als Faktorisierung $\beta = (A \otimes B) \circ \otimes$. Für diese Faktorisierung $A \otimes B$ ist stets $(A \otimes B)(v \otimes w) = Av \otimes Bw$.

(49.8) Folgerung: Sei G eine Gruppe und ρ eine *Darstellung* auf dem K -Vektorraum V (d.h. $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ ist ein Gruppenhomomorphismus; $\text{Aut}(V)$ ist bekanntlich die Gruppe der Vektorraumisomorphismen $A : V \rightarrow V$). Ist dann $\sigma : G \rightarrow \text{Aut}(W)$ eine weitere Darstellung, so definiert $(\rho \otimes \sigma)(g) := \rho(g) \otimes \sigma(g) \in \text{Aut}(V \otimes W)$ eine Darstellung $\rho \otimes \sigma : G \rightarrow \text{Aut}(V \otimes W)$. Denn es ist $(\rho \otimes \sigma)(gh) = (\rho \otimes \sigma)(g) \circ (\rho \otimes \sigma)(h)$ für $g, h \in G$ (vgl. 49.7).

(49.9) Notation: Nach 49.6 sind $(V \otimes V) \otimes V$ und $V \otimes (V \otimes V)$ kanonisch isomorph, daher wird auch $V \otimes V \otimes V$ und abkürzend $V^{\otimes 3}$ oder $\otimes^3 V$ anstelle von einem dieser zueinander kanonisch isomorphen Vektorräume geschrieben. Allgemeiner

ist $V^{\otimes n}$ oder $\otimes^n V$ die n -fache Iterierung des Tensorproduktes mit V . Dabei wird $V^{\otimes 0} = \otimes^0 V := K$ gesetzt als Konvention.

Aus den Isomorphismen in 49.6 läßt sich weiterhin für K -Vektorräume V und W und für natürliche n die folgende kanonische Isomorphie herleiten:

$$(V \oplus W)^{\otimes n} \cong \bigoplus_{k=0}^{k=n} (V^{\otimes k} \otimes W^{\otimes n-k})^{\oplus \binom{n}{k}}$$

(49.10) Satz: $V^{\otimes n} = \otimes^n V$ zusammen mit der entsprechenden n -linearen Abbildung $\otimes : V^n \rightarrow V^{\otimes n}$, $(v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n$ hat die folgende universelle Eigenschaft:

Jede n -lineare Abbildung $\beta : V^n \rightarrow E$ in einen K -Vektorraum E hat eine eindeutig bestimmte lineare Faktorisierung $\hat{\beta} : V^{\otimes n} \rightarrow E$, das heißt $\hat{\beta}$ ist linear und es gilt $\beta = \hat{\beta} \circ \otimes$.

Wie zuvor ist $\otimes : V^n \rightarrow V^{\otimes n}$ eindeutig bestimmt bis auf Isomorphie.

(49.11) Das äußere und das symmetrische Produkt: Analog zum Tensorprodukt $V \otimes V$ kann man das *äußere Produkt* $V \wedge V$ mit der alternierenden bilinearen Abbildung $\wedge : V \times V \rightarrow V \wedge V$ (bzw. das *symmetrische Produkt* $V \odot V$ mit der symmetrischen bilinearen Abbildung $\odot : V \times V \rightarrow V \odot V$) einführen mit der folgenden universellen Eigenschaft:

Jede alternierende (bzw. symmetrische) bilineare Abbildung $\beta : V \times V \rightarrow E$ in einen weiteren K -Vektorraum E hat eine eindeutig bestimmte lineare Faktorisierung $\hat{\beta} : V \wedge V \rightarrow E$ (bzw. $\hat{\beta} : V \odot V \rightarrow E$), das heißt $\hat{\beta}$ ist linear und es gilt $\beta = \hat{\beta} \circ \wedge$ (bzw. $\beta = \hat{\beta} \circ \odot$).

$V \wedge V$ gewinnt man als Quotienten von $V \otimes V$ bezüglich des Unterraumes $A \subset V \otimes V$, der von allen Vektoren der Form $v \otimes v$, $v \in V$, erzeugt wird. Es ist $\wedge = p \circ \otimes$, wenn p die Quotientenabbildung $p : V \otimes V \rightarrow (V \otimes V)/A =: V \wedge V$ ist. Analog kann man $V \odot V$ konstruieren, wenn man A durch den Raum S ersetzt, der durch die Vektoren der Form $v \otimes w - w \otimes v$ erzeugt wird.

$V \wedge V$ und $V \odot V$ lassen sich (im Falle $\text{char}(K) \neq 2$) auch als Unterräume von $V \otimes V$ verstehen, und zwar als die Bilder der linearen Abbildungen

$$\text{Alt} : V \otimes V \rightarrow V \otimes V, v \otimes w \mapsto v \otimes w - w \otimes v$$

bzw.

$$\text{Sym} : V \otimes V \rightarrow V \otimes V, v \otimes w \mapsto v \otimes w + w \otimes v.$$

In dieser Auffassung gilt $V \otimes V = (V \wedge V) \oplus (V \odot V)$.

Wie beim Tensorprodukt kennt man auch beim äußeren Produkt und beim symmetrischen Produkt die n -fachen iterierten Produkte $\wedge^n V = V^{\wedge n}$ bzw. $\odot^n V = V^{\odot n}$, die wieder eine entsprechenden universelle Eigenschaft erfüllen.

$V^{\wedge n}$ und $V^{\odot n}$ lassen sich (im Falle $\text{char}(K) = 0$) wieder als Unterräume von $V^{\otimes n}$ verstehen, aber es gilt im allgemeinen $V^{\otimes n} \neq V^{\wedge n} \oplus V^{\odot n}$ für $n \geq 3$.

Anders als in 49.10 hat man für das äußere und das symmetrische Produkt die Formeln

$$\begin{aligned} \bigwedge^n (V \oplus W) &= (V \oplus W)^{\wedge n} \cong \bigoplus_{k=0}^{k=n} V^{\wedge k} \otimes W^{\wedge n-k} \\ \bigodot^n (V \oplus W) &= (V \oplus W)^{\odot n} \cong \bigoplus_{k=0}^{k=n} V^{\odot k} \otimes W^{\odot n-k} \end{aligned}$$

Eine letzte zusammenfassende Beschreibung all dieser Räume: Es sei $\text{Mult}^n(V, E)$ der K -Vektorraum der n -linearen Abbildungen vom K -Vektorraum V^n in den K -Vektorraum E , und es seien $\text{Alt}^n(V, E)$ bzw. $\text{Sym}^n(V, E)$ die Untervektorräume der alternierenden bzw. der symmetrischen n -linearen Abbildungen. Dann liefern die jeweiligen universellen Eigenschaften mit ihren Faktorisierungen über \otimes, \wedge bzw. \odot die folgenden kanonischen linearen Isomorphismen:

$$\begin{aligned} \text{Mult}^n(V, E) &\longrightarrow \text{Hom}(V^{\otimes n}, E), \quad \beta \longmapsto \hat{\beta} \\ \text{Alt}^n(V, E) &\longrightarrow \text{Hom}(V^{\wedge n}, E), \quad \beta \longmapsto \hat{\beta} \\ \text{Sym}^n(V, E) &\longrightarrow \text{Hom}(V^{\odot n}, E), \quad \beta \longmapsto \hat{\beta} \end{aligned}$$

(49.12) Bemerkung zur Erzeugung von Gruppendarstellungen:

In Ausweitung von 49.8 hat man zu zwei Darstellungen $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ und $\sigma : G \rightarrow \text{Aut}(W)$ einer vorgegebenen Gruppe G neben der in 49.8 beschriebenen Darstellung $\rho \otimes \sigma : G \rightarrow \text{Aut}(V \otimes W)$ ganz analog die Darstellungen $\rho \wedge \sigma : G \rightarrow \text{Aut}(V \wedge W)$ und $\rho \odot \sigma : G \rightarrow \text{Aut}(V \odot W)$. Ferner ergeben sich entsprechend die Darstellungen $\rho^* : G \rightarrow \text{Aut}(V^*)$ sowie $\rho^{\otimes n} : G \rightarrow \text{Aut}(V^{\otimes n})$, $\rho^{\wedge n} : G \rightarrow \text{Aut}(V^{\wedge n})$ und $\rho^{\odot n} : G \rightarrow \text{Aut}(V^{\odot n})$.

(49.13) Tensoralgebra, äußere Algebra und symmetrische Algebra:

Die Iterierten $\otimes^n V$ faßt man zusammen zu dem Raum

$$\bigotimes^{\bullet} V := \bigoplus_{n=0}^{n=\infty} \otimes^n V = K \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 3} \oplus \dots$$

der Folgen (t_n) , $t_n \in V^{\otimes n}$ mit $t_n = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dieser Raum $\bigotimes^{\bullet} V$ hat eine natürliche „Tensor-Multiplikation“ $\otimes : \bigotimes^{\bullet} V \times \bigotimes^{\bullet} V \rightarrow \bigotimes^{\bullet} V$ definiert durch die Multiplikation

$$\otimes : \otimes^m V \times \otimes^n V \rightarrow \otimes^{m+n} V,$$

$$(v_1 \otimes v_2 \dots \otimes v_m, w_1 \otimes w_2 \dots \otimes w_n) \mapsto v_1 \otimes v_2 \dots \otimes v_m \otimes w_1 \otimes w_2 \dots \otimes w_n.$$

$\bigotimes^{\bullet} V$ mit dieser Multiplikation ist die *Tensoralgebra*. Man rechnet leicht nach, dass es sich dabei tatsächlich um eine assoziative Algebra über K handelt. Die Körpereins $1 \in K$ ist das Einselement der Algebra $\bigotimes^{\bullet} V$.

Ganz analog bildet man die *äußere Algebra* (auch *Grassmann-Algebra* genannt)

$$\bigwedge^\bullet V := \bigoplus_{n=0}^{n=\infty} \wedge^n V$$

und die *symmetrische Algebra*

$$\bigodot^\bullet V := \bigoplus_{n=0}^{n=\infty} \odot^n V.$$

Soweit die rein algebraische Theorie des Tensorproduktes und seiner Varianten. In der Quantenphysik hat man es mit Hilberträumen zu tun, und ein Tensorprodukt zweier Hilberträume soll wieder ein Hilbertraum sein.

Für den Fall, dass V, W Hilberträume mit den Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ sind, ist das Tensorprodukt $V \otimes W$ mit dem folgendermaßen definierten Skalarprodukt $\langle v \otimes w, v' \otimes w' \rangle_{V \otimes W} := \langle v, v' \rangle_V + \langle w, w' \rangle_W$ in natürlicher Weise zunächst einmal ein Prähilbertraum, wie man leicht nachrechnet.

Ist V oder W ein endlichdimensionaler Hilbertraum, so ist das Tensorprodukt $V \otimes W$ mit diesem Skalarprodukt vollständig, also wieder ein Hilbertraum. Sind beide Hilberträume unendlichdimensional, und das ist die typische Situation in der Quantenphysik, so ist das algebraisch definierte Tensorprodukt $V \otimes W$ nicht vollständig. Das richtige Objekt in diesem Rahmen ist daher die Vervollständigung von $V \otimes W$ mit dem gerade definierten Skalarprodukt, und dieser Hilbertraum wird mit $V \hat{\otimes} W$ bezeichnet.

(49.14) Satz: $\otimes : V \times W \rightarrow V \hat{\otimes} W$ ist stetig und es gilt: $V \hat{\otimes} W$ ist der (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte Hilbertraum, so dass für $\otimes : V \times W \rightarrow V \hat{\otimes} W$ die folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:

Zu jeder stetigen bilinearen Abbildung $\beta : V \times W \rightarrow E$ in einen Hilbertraum E gibt es einen eindeutig bestimmte stetige lineare Abbildung $\hat{\beta} : V \hat{\otimes} W \rightarrow E$ mit $\beta = \hat{\beta} \circ \otimes$.

Beweis: Zunächst wird zu dieser Aussage eine Festlegung verlangt, was denn Stetigkeit für eine bilineare Abbildung $\beta : V \times W \rightarrow E$ bedeutet. Das geschieht über das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V \oplus W}$ auf dem kartesischen Produkt $V \times W = V \oplus W$: $\langle v \oplus w, v' \oplus w' \rangle_{V \oplus W} := \langle v, v' \rangle_V + \langle w, w' \rangle_W$. Mit diesem Skalarprodukt ist $V \oplus W$ stets ein Hilbertraum, wie man leicht nachprüft. Und eine vorgegebene bilineare Abbildung $\beta : V \oplus W \rightarrow E$ in einen weiteren Hilbertraum E ist stetig auf ganz $V \oplus W$, wenn sie in $0 \in V \oplus W$ stetig ist, und das ist gleichbedeutend damit, dass

$$\|\beta\| := \sup\{\|\beta(v \oplus w)\| : v \oplus w \in V \oplus W \text{ mit } \|v\| \leq 1, \|w\| \leq 1\}$$

eine endliche reelle Zahl ist, das heißt, die Stetigkeit von β ist gleichbedeutend damit, dass β beschränkt ist. Es gilt im übrigen $\|v \oplus w\| \leq \|\beta\| \|v\| \|w\|$ für alle $v \oplus w \in V \oplus W$.

Mit dieser Information ist es klar, dass $\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes W$ stetig ist. Denn

$$\|\otimes(v \oplus w)\|_{V \otimes W}^2 = \|v \otimes w\|_{V \otimes W}^2 = \|v\|_V^2 + \|w\|_W^2 = \|v \oplus w\|_{V \oplus W}^2,$$

also ist \otimes eine Isometrie (die in der Regel nicht surjektiv ist). Und $\hat{\beta}$ ist stetig wegen $\|\hat{\beta}(v \otimes w)\| = \|\beta(v \oplus w)\|$, also $\|\hat{\beta}\| = \|\beta\|$. Natürlich ist $\hat{\beta}$ eindeutig bestimmt.

Die Eindeutigkeit (bis auf Isomorphie) von $V \hat{\otimes} W$ als Hilbertraum mit der universellen Eigenschaft ergibt sich wie oben aus der universellen Eigenschaft.

Die Vervollständigung von $V^{\otimes n}$ wird mit $\hat{\otimes}^n V$ oder $V^{\hat{\otimes} n}$ bezeichnet.

(49.15) Fockraum: Für die Quantenphysik von Mehrteilchensystemen und für die Quantenfeldtheorie wird zu einem Hilbertraum V ein natürlicher Hilbertraum benötigt, der alle $V^{\otimes n}$ umfaßt. Das ist der *Fockraum* FV , die Vervollständigung der Tensoralgebra $\otimes^\bullet V = \bigoplus V^{\otimes n}$ bezüglich des Skalarprodukts: $\langle \sum_n v_n, \sum_m w_m \rangle_{\otimes^\bullet} := \sum_n \langle v_n, w_n \rangle_{V^{\otimes n}}$.

FV ist der Hilbertraum aller Folgen (v_n) , wobei v_n in dem vervollständigtem Raum $\hat{\otimes}^n V$ liegt, mit $\sum_{n=0}^{\infty} \langle v_n, v_n \rangle_{V^{\hat{\otimes} n}} < \infty$.

Wenn V ein separabler Hilbertraum ist, so gilt das auch für FV .

Entsprechend interessiert man sich für die Vervollständigung der äußeren Algebra $\bigwedge^\bullet V$ und der symmetrischen Algebra $\bigoplus^\bullet V$.