§ 47 Projektive Geometrie und projektive Räume

Zwei Motivationen:

1° **Parallelen in der affinen und projektiven Geometrie:** In der affinen Geometrie gibt es Geraden in der Ebene, die sich nicht schneiden, also *parallel* sind. Aus der Kunst (und natürlich auch aus der Mathematik) kennt man die Vorstellung, dass sich solche parallelen Geraden aber im „Unendlichen" schneiden (Zentralprojektion). Wie lässt sich diese Aussage präzise in der Mathematik fassen? Und was für eine Struktur ergibt sich dabei?

Ein erster Ansatz führt dazu, dass man zu jeder Geraden g aus der affinen Ebene $\mathbb{E}$ die Klasse $[g]$ aller zu dieser Geraden parallelen Geraden betrachtet (Parallelismus ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Geraden der affinen Ebene $\mathbb{E}$). Diese Klasse $[g]$ fasst man als eine „Richtung" auf, und man definiert als die *projektive Ebene* $\mathbb{P}$ die affine Ebene $\mathbb{E}$ zusammen mit der Menge aller Richtungen (diese Richtungen gelten als die unendlich fernen Punkte) $\mathbb{P} := \mathbb{E} \cup \{[g] : g \text{ ist Gerade in } \mathbb{E}\}$. Dabei soll nun jeder Geraden g in $\mathbb{E}$ noch der Punkt $[g]$ hinzugefügt werden, um die zugehörige *projektive Gerade* $g \cup [g]$ in $\mathbb{P}$ zu ergeben, und es soll die Menge aller Richtungen ebenfalls eine (*projektive*) Gerade in $\mathbb{P}$ sein (die „unendlich ferne" Gerade). Die Geraden in $\mathbb{P}$ sind also die Mengen $G = g \cup [g]$, wobei g eine Gerade in der affinen Ebene $\mathbb{E}$ ist, und $G_\infty = \{[g] : g \subset \mathbb{E}, g \text{ Gerade in } \mathbb{E}\}$. Nun gilt die folgende Aussage:

Je zwei verschiedene Geraden G, H aus $\mathbb{P}$ schneiden sich in genau einem Schnittpunkt in $\mathbb{P}$.

Denn sind diese beiden Geraden von der Form $G = g \cup [g]$ und $H = h \cup [h]$ mit Geraden g, h aus $\mathbb{E}$, so sind g, h entweder nicht parallel, und das bedeutet, dass sie sich in $\mathbb{E}$ in genau einem Punkt Q schneiden, also gilt $G \cap H = \{Q\}$, oder g, h sind parallel und $g \neq h$, dann gilt $g \cap h = \emptyset$ und $G \cap H = \{[g]\}$ wegen $[g] = [h]$. Im Falle $H = G_\infty$ ist $G \cap G_\infty = \{[g]\}$.

2° **Der Raum der Zustände in der Quantenmechanik:** Einem quantenmechanischen System wird ein komplexer Hilbertraum H zugeordnet.

Ein quantenmechanischer Zustand wird dann durch eine Wellenfunktion φ, d.h. durch einen Vektor $\varphi \in H \setminus \{0\}$, in einem Hilbertraum H repräsentiert. Eine weitere Wellenfunktion $\psi \in H$ repräsentiert denselben quantenmechanischen Zustand, wenn es einen Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\varphi = \lambda\psi$ gibt, wenn also beide Vektoren auf einer Geraden durch 0 liegen. Der Raum der quantenmechanischen Zustände ist also der Raum der Geraden in H durch 0. Dieser Raum ist der projektive Raum $\mathbb{P}(H)$ zu H. $\mathbb{P}(H)$ ist der Phasenraum der Quantenmechanik. Er entspricht dem Phasenraum P der Klassischen Mechanik (z.B. $P = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ bei n Freiheitsgraden).

Die Observablen der Klassischen Mechanik sind die (in der Regel beliebig oft differenzierbaren) Funktionen auf dem Phasenraum P. Die Observablen der Quantenmechanik sind die (beschränkten und unbeschränkten) selbstadjungierten Operatoren auf H.

(47.1) Definition: Sei V ein Vektorraum über dem Körper k. Auf $V\backslash\{0\}$ haben wir die Äquivalenzrelation

$$v \sim w \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{Es gibt } \lambda \in k \text{ mit } v = \lambda w.$$

Der Raum der Äquivalenzklassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation ist definitionsgemäß ist der zu V gehörige *projektive Raum*

$$\boxed{\mathbb{P}(V) := V\backslash\{0\}/\sim\ .}$$

(47.2) Bemerkung – Definition:

In der Quantenmechanik hat für je zwei Wellenfunktionen $\varphi, \psi \in H\backslash\{0\}$ die Größe

$$\delta([\varphi], [\psi]) := \frac{\left|\left\langle \varphi, \psi \right\rangle\right|^2}{\|\varphi\|^2 \|\psi\|^2}$$

eine besondere Bedeutung (als Übergangswahrscheinlichkeit). Wie man sieht, ist diese Größe für die Zustände wohldefiniert, weil sie unabhängig von den Längen $\|\varphi\|, \|\psi\|$ ist. Daher haben wir δ gleich für Paare von Zuständen $([\varphi], [\psi]) \in \mathbb{P}(H) \times \mathbb{P}(H)$ definiert. Auf diese Weise ist durch die Abbildung

$$\delta : \mathbb{P}(H) \times \mathbb{P}(H) \to \mathbb{R}$$

eine Art Abstand auf dem Phasenraum $\mathbb{P}(H)$ gegeben.

Ähnlich wie die Galileitransformationen in der Klassischen Mechanik oder die Poincarétransformationen in der Relativitätstheorie ist auf dem quantenmechanischen Phasenraum $\mathbb{P} := \mathbb{P}(H)$ eine Gruppe von Transformationen ausgezeichnet und für die Quantenmechanik relevant, nämlich die Gruppe derjenigen Transformationen, die δ invariant lassen:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}) := \{F : \mathbb{P} \to \mathbb{P} : F \text{ bijektiv und } \delta(Z, W) = \delta(FZ, FW)) \text{ für alle } Z, W \in \mathbb{P}\}.$$

Für eine unitäre Transformation $U : H \to H$ sei zum Beispiel

$$\hat{U}([\varphi]) := [U(\varphi)]\ ,\ \varphi \in H.$$

Dann ist $\hat{U} : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ wohldefiniert und $\hat{U} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P})$. Ebenso gilt für *semi–unitäre Transformationen* $R : H \to H$, das sind $\mathbb{R}$–lineare und bijektive

$$R : H \to H \text{ mit } R(\lambda\varphi) = \overline{\lambda}R(\varphi) \text{ und } \left\langle \varphi, \psi \right\rangle = \left\langle R\varphi, R\psi \right\rangle,$$

dass

$$\hat{R}([\varphi]) := [R(\varphi)]\ ,\ \varphi \in H,$$

einen Automorphismus $\hat{R} : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ definiert, d.h. $\hat{R} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P})$.

Das sind alle Automorphismen, denn es gilt:

(47.3) Satz von Wigner:

$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}) = \{\hat{T} : T \in \mathcal{B}(H)\,, T$ ist unitär oder semi–unitär $\}$.

Einen Beweis findet man in dem Buch von E. Wigner (*Gruppentheorie*, Vieweg 1931).

Um schließlich auch eine Verbindung zwischen Projektivierung $\mathbb{P}(V)$ und der Motivation über die Parallelen der affinene Ebene am Beginn des Paragrafen herzustellen, gehen wir erst einmal auf die endlichdimensionalen Standardräume $\mathbb{P}_n$ und dann auf den Fall $n = 2$ ein.

(47.4) Definition: Sei k ein Körper.

1° $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n(k) := \mathbb{P}(k^{n+1})$ ist der *n–dimensionale projektive Raum* über k.

2° Für einen Punkt $[x] \in \mathbb{P}_n$, $x = (x^0, x^1, \ldots, x^n)^\top \in k^{n+1}\backslash\{0\}$, sind $(x^0 : x^1 : \ldots : x^n)$ die *homogenen Koordinaten* des Punktes $[x]$ im projektiven Raum $\mathbb{P}_n$, und man schreibt

$$[x] = (x^0 : x^1 : \ldots : x^n).$$

Für $[y] = (y^0 : y^1 : \ldots : y^n)$ gilt

$$[x] = [y] \Longleftrightarrow (x^0 : x^1 : \ldots : x^n) = (y^0 : y^1 : \ldots : y^n) \Longleftrightarrow x = \lambda y \text{ für ein } \lambda \in k\backslash\{0\}.$$

Insbesondere ist $(x^0 : x^1 : \ldots : x^n) = (\lambda x^0 : \lambda x^1 : \ldots : \lambda x^n)$, falls $\lambda \neq 0$..

3° Zu $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in k^{n+1}$ ist $H_a := \{(x^0 : x^1 : \ldots : x^n) : \sum a_j x^j = 0\,\}$ die durch a bestimmte *projektive Hyperebene* in $\mathbb{P}_n$. Im Falle $n = 2$ ist H_a eine projektive Gerade. H_a kann als Projektivierung des n–dimensionalen Unterraumes $\mathrm{Ker}\, a = \{(x^0, x^1, \ldots, x^n)^\top \in k^{n+1} : \sum a_j x^j = 0\,\}$ verstanden werden. Im Falle $n = 2$ ist $H_a = \{(x^0 : x^1 : x^2) \in \mathbb{P}_2 : a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 = 0\,\} = \mathbb{P}(\{(x^0, x^1, x^2)^\top \in k^3 : a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 = 0\,\})$.

4° Die *Kanonische Überdeckung* von $\mathbb{P}_n$:

$$U_j = \{(x^0 : x^1 : \ldots : x^n) \in \mathbb{P}_n : x_j \neq 0\,\}$$

Es gilt $\mathbb{P}_n = \bigcup_{j=0}^n U_j$. Und jedes U_j kann in natürlicher Weise mit k^n identifiziert werden. Zum Beispiel bei $j = 0$ vermöge der Abbildung

$$\varphi_0 : U_0 \to k^n\,,\ (x^0 : x^1 : \ldots : x^n) = (1 : \frac{x^1}{x^0} : \ldots : \frac{x^n}{x^0}) \longmapsto (\frac{x^1}{x^0} : \ldots : \frac{x^n}{x^0})^\top \in k^n,$$

und analog für $j \neq 0$. Insofern ist der affine k^n in natürlicher Weise als U_0 in $\mathbb{P}_n$ eingebettet. Der Rest $\mathbb{P}_n\backslash U_0$ ist wieder ein projektiver Raum, der *unendlich ferne* $\mathbb{P}_{n-1}$.

Anmerkung: Diese enge Beziehung zwischen $k^n \cong \mathbb{A}_n \subset \mathbb{P}_n$ rechtfertigt die Beschreibung von $\mathbb{P}_n$ als n–dimensional. Im Falle von $k = \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ werden über die bijektiven Abbildungen

$$\varphi_j : U_j \to \mathbb{K}^n$$

Karten (bzw. Parametrisierungen) gegeben, die $\mathbb{P}_n$ zu einer n–dimensionalen reellen bzw. komplexen Mannigfaltigkeit machen.

(47.5) Von der affinen zur projektiven Ebene: Wir kommen zurück auf die affine Ebene und ihre parallelen Geraden, die sich im Unendlichen, das heißt im projektiven Abschluss, schneiden. In der affinene Ebene $\mathbb{E} = k^2$ kann eine Gerade g zunächst durch drei Parameter $a_0, a_1, a_2 \in k$ eindeutig beschrieben werden:

$$g = g_a := \{(x^1, x^2) \in k^2 : a_1x^1 + a_2x^2 = -a_0\}.$$

Es gilt:

1° Für ein festes Paar $(a_1, a_2) \in k^2\backslash\{0\}$ ist $\{\, g_a : a = (a_0, a_1, a_2), a_0 \in k \,\}$ eine Schar von zueinander parallelen Geraden. Es kommen alle parallelen Geraden vor. Also $\left[g_{(0,a_1,a_2)}\right] = \{\, g_a : a = (a_0, a_1, a_2), a_0 \in k \,\}$.

2° Solche Paare $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in k^2\backslash\{0\}$ liefern genau dann dieselben Parallelenscharen (d.h. $\{\, g_a : a = (a_0, a_1, a_2), a_0 \in k \,\} = \{\, g_b : b = (b_0, b_1, b_2), b_0 \in k \,\}$), wenn $(a_1 : a_2) = (b_1 : b_2)$ in $\mathbb{P}_1$.

3° Vermöge $\varphi_0 : U_0 \to k^2 = \mathbb{E}$ findet sich die affine Ebene $\mathbb{E}$ wieder in der projektiven Ebene $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}$ als U_0.

4° Die Gerade g_a wird dabei zu $(\varphi_0)^{-1}(g_a) = \{(1 : x^1 : x^2) : a_1x^1 + a_2x^2 = -a_0\,\} = \{(x^0 : x^1 : x^2) : a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 = 0\,, x_0 \neq 0\,\}$. Das ist genau die projektive Gerade H_a in der projektiven Ebene $\mathbb{P}$, allerdings ohne den Punkt $(0 : a_2 : -a_1) \in H_a$: $\{(0 : a_2 : -a_1)\} = \{(x^0 : x^1 : x^2) \in \mathbb{P}_2 : a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 = 0\,\}\backslash(\varphi_0)^{-1}(g_a)$. Dieser Punkt $(0 : a_2 : -a_1)$ beschreibt die Richtung der Geradenschar $(g_a)_{a_0\in k}$.

5° Die Aussage „*Je zwei verschiedene Geraden G, H aus $\mathbb{P}$ schneiden sich in genau einem Schnittpunkt in $\mathbb{P}$*“ vom Beginn dieses Paragrafen hat jetzt die folgende Beweisführung, die uns zurück zu elementaren linearen Gleichungssystemen führt:

Beweis: Es sei $G = H_a \neq H = H_b$. Die gesuchte Schnittmenge ist $H_a \cap H_b = \{(x^0 : x^1 : x^2) \in \mathbb{P}_2 : a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 = 0$ und $b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 = 0\,\}$. Wegen $H_a \neq H_b$ ist $\{a, b\}$ linear unabhängig in k^3 . Die Matrix A mit den Zeilen a, b hat daher den Rang 2, und der Kern $\operatorname{Ker} A$ der entsprechenden linearen Abbildung $A : k^3 \to k^2$ hat daher die Dimension 1. Also hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 &= 0 \\ b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 &= 0 \end{aligned}$$

einen eindimensionalen Lösungsraum. Das heißt, es gibt, bis auf skalare Vielfache, genau einen Vektor $x \in k^3$, $x \neq 0$, der dieses Gleichungssystem löst. Und dieser Punkt x bestimmt genau einen Punkt $Q = [x] \in \mathbb{P}$ auf den beiden Geraden H_a, H_b, d.h. $Q = H_a \cap H_b$.