F. Der „Bra–Ket–Formalismus" von Dirac

In diesem Abschnitt sei H wieder ein Hilbertraum, und es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Das Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf H wird in der Quantenmechanik oft auch als $\langle\ |\ \rangle$ geschrieben.

(46.22) Neue Notationen:

1° Ein Vektor bzw. eine „Wellenfunktion" $\varphi \in H$, wird auch $|\varphi\rangle$, das heißt als sogenannter *Ket–Vektor* geschrieben.

2° Damit verbunden sind die Schreibweisen: $|\varphi\rangle + |\psi\rangle = |\varphi + \psi\rangle$ und $\lambda|\varphi\rangle = |\lambda\varphi\rangle$ für $\varphi, \psi \in H, \lambda \in \mathbb{K}$ sowie für einen linearen Operator A auf H: $A(|\varphi\rangle) = A|\varphi\rangle = |A\varphi\rangle$.

3° Eine stetige Linearform auf H, die nach dem Rieszschen Darstellungssatz 46.6 als $j_\psi = \langle \psi, \ \rangle$, $\psi \in H$, gegeben ist, wird als sogenannter *Bra–Vektor* $\langle\psi|$ geschrieben.

4° Der **entscheidende Vorteil:** Wendet man den Bra–Vektor $\langle\psi|$ auf den Ket–Vektor $|\varphi\rangle$ an, so ergibt sich $\langle\psi||\varphi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle$ „Bra–c–Ket" = "bracket".

5° Mit der Notation $\langle\ |$ verbunden sind die Schreibweisen: $\langle\varphi| + \langle\psi| = \langle\varphi+\psi|$ und $\overline{\lambda}\langle\varphi| = \langle\lambda\varphi|$ für $\varphi, \psi \in H, \lambda \in \mathbb{K}$ sowie für einen linearen Operator A auf H: $(|\psi\rangle) \circ A = |\psi\rangle A =: |\psi A\rangle$. Als Vektor in H ist ψA in diesem Formalismus gerade $A^\star\psi$. Denn es gilt: $\langle\psi A|\varphi\rangle = \langle\psi|A|\varphi\rangle = \langle\psi|A\varphi\rangle = \langle A^\star\psi|\varphi\rangle$.

6° Im Unterschied zu 4° beschreibt die Notation $|\varphi\rangle\langle\psi|$ einen linearen Operator $H \to H$ (mit endlichdimensionalem Bild), und zwar $|\varphi\rangle\langle\psi|(\phi) = |\varphi\rangle\langle\psi|\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle\varphi$.

7° Mit dieser Notation kommt man bei der Vorgabe eines Orthonormalsystems (c_k) in H zur Darstellung

$$P = \sum |c_k\rangle\langle c_k| \text{ für die orthogonale Projektion } P = \sum \langle c_k,\ \rangle c_k \text{ sowie}$$

$$A = \sum |\lambda_k c_k\rangle\langle c_k| \text{ für den normalen Operator } A = \sum \lambda_k \langle c_k,\ \rangle c_k .$$

A ist selbstadjungiert, wenn $\lambda_k \in \mathbb{R}$.

(46.23) Analogien:

Der Ket–Vektor $|\varphi\rangle \in H$ entspricht dem Spaltenvektor $z \in \mathbb{C}^n$.

Der Bra–Vektor $\langle\psi| \in H'$ entspricht dem Zeilenvektor $\overline{w}^\top \in \mathbb{C}^n$.

Das Skalarprodukt $\langle\psi|\varphi\rangle$ entspricht dem Produkt $\overline{w}^\top z \in \mathbb{C}$.

Der Bildvektor $|A\varphi\rangle \in H$ entspricht dem Matrixprodukt $Az \in \mathbb{C}^n$.

Die Linearform $\langle\psi A| = \langle A^\star\psi|$ entspricht dem Matrixprodukt $\overline{w}^\top A = \overline{A^\star w}^\top$, wobei $A^\star w = \overline{A}^\top$.