C. Selbstadjungierte und normale Operatoren

In diesem Abschnitt sei H wieder ein Hilbertraum, und es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

(46.8) Beispiele:

1° Die Beispiele aus 44.3 sind Beispiele für den Fall $\dim H < \infty$.

2° Es gilt wie zuvor: Selbstadjungierte und unitäre Operatoren sind normal.

3° Für jede beschränkte Folge (λ_n) von Zahlen aus $\mathbb{K}$, $|\lambda_n| \leq M$, wird auf ℓ_2 durch $Ae_k := \lambda_k e_k$ ein linearer Operator definiert: $A\big(\sum z_k e_k\big) = \sum \lambda_k z_k e_k$ konvergiert genau dann, wenn $\sum |\lambda_k z_k|^2 < \infty$. Und $\sum |\lambda_k z_k|^2 \leq M^2 \sum |z_k|^2$. Der so definierte (diagonale) Operator A ist normal. A ist selbstadjungiert, wenn alle λ_k reell sind. A ist unitär, wenn alle λ_k vom Betrag 1 sind.

4° Analog für ein ONS (c_k) in H und $(\lambda_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ mit $|\lambda_n| \leq M$: $A(z) := \sum \lambda_k \langle c_k, z \rangle c_k$ definiert einen normalen Operator.

5° Eine besondere Klasse von selbstadjungierten Operatoren wird durch die Integraloperatoren gegeben: Sei $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ stetig und quadratintegrierbar, also $\iint |K(x,y)|^2 \, dxdy < \infty$. Für $\varphi \in \mathcal{C}_2$ ($\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$) ist dann durch $K\varphi(x) := \int K(x,y)\varphi(y)dy$ für $x \in \mathbb{R}^n$ eine stetige, quadratintegrierbare Funktion $K\varphi \in \mathcal{C}_2$ definiert.

(Beweis für den Spezialfall $K(x,y) = g(x)h(y)$ mit $g, h \in \mathcal{C}_2$: $\int h(y)\varphi(y)dy$ existiert, da $\left|\int h(y)\varphi(y)dy\right| \leq \|h\| \, \|\varphi\|$. Deshalb ist $K\varphi(x) = \int g(x)h(y)\varphi(y)dy = g(x)\int h(y)\varphi(y)dy$ wohldefiniert und liefert eine stetige Funktion, deren Quadrat integrierbar ist: $\int |K\varphi(x)|^2 \, dx \leq \int |g(x)|^2 \, dx \, \|h\|^2 \, \|\varphi\|^2 = \|g\|^2 \, \|h\|^2 \, \|\varphi\|^2$.)

Die Abbildung $K : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_2$ ist linear und beschränkt durch

$$C = \sqrt{\iint |K(x,y)|^2 \, dxdy} \; :$$

$\|K\varphi\|^2 \leq C^2 \|\varphi\|^2$. Also hat K eine eindeutig bestimmte lineare und beschränkte Fortsetzung auf die Vervollständigung L_2 von $\mathcal{C}_2$: $\hat{K} : L_2 \to L_2$.

Unter der Voraussetzung $k(x,y) = \overline{k}(y,x)$ ist der Operator K selbstadjungiert: $\langle K\varphi, \psi \rangle = \int \overline{K\varphi}(x)\psi(x)dx = \iint \overline{k}(x,y)\overline{\varphi}(y)\psi(x)dydx = \iint \overline{\varphi}(y)k(y,x)\psi(x)dxdy = \int \overline{\varphi}(y)K\psi(y)dy = \langle \varphi, K\psi \rangle$.

Für den Spezialfall $K(x,y) = g(x)h(y)$ mit $g = \bar{h}$ sieht man: $|K\varphi(x) - K\varphi(x')| \leq |(g(x) - g(x')| \, \|g\| \, \|\varphi\|$. Für eine beschränkte Folge (φ_n) aus $\mathcal{C}_2$ ist die Folge $(K\varphi_n)$ deshalb gleichgradig stetig. Daher hat $(K\varphi_n)$ (nach dem Satz von Arzela-Ascoli) eine konvergente Teilfolge, das bedeutet, dass K nicht nur selbstadjungiert, sondern auch kompakt ist, siehe 46.10.

Wie in §44 beweist man:

(46.9) Satz: $A \in \mathcal{B}(H)$ sei normal.

1° $\langle Az, Aw \rangle = \langle A^\star z, A^\star w \rangle$ für $z, w \in H$.

2° $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^\star$, $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A^\star$ und $H = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A$, $\operatorname{Ker} A \perp \operatorname{Im} A$.

3° Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ Eigenwert von A, so ist $\overline{\lambda} \in \mathbb{K}$ Eigenwert von $A^\star$ und es gilt: $\operatorname{Ker}(A - \lambda \mathrm{id}_H) = \operatorname{Ker}(A^\star - \overline{\lambda}\mathrm{id}_H)$.