B. Dualität und Adjungierte

In diesem Abschnitt sei H wieder ein Hilbertraum.

(46.6) Satz (Darstellungssatz von Riesz): Die aus 42.1 und 44.1 bekannte Abbildung $j : H \to H'$, $w \mapsto j_w$, ist ein semilinearer, isometrischer $\mathbb{R}$–Isomorphismus.

Beweis: j ist wohldefiniert nach 46.3.2° und offensichtlich ist j auch semilinear: $j(w + \lambda w') = \langle w + \lambda w', \ \rangle = \langle w, \ \rangle + \overline{\lambda}\langle w', \ \rangle = j(w) + \overline{\lambda} j(w')$. Außerdem ist j isometrisch nach 46.3.2° wegen $\|j_w\| = \|w\|$. Daher ist j insbesondere auch injektiv. Die Surjektivität von j folgt mit Hilfe einer Hilbertbasis durch 46.3.3°.

Beweisskizze für einen alternativen Beweis ohne Verwendung einer Hilbertbasis: $\mu \in H'$ habe ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Norm 1. Dann gibt es eine Folge $z_n \in H$ mit $\|z_n\| \leq 1$ und $|\mu(z_n)| \longrightarrow 0$. Durch eventuelle Multiplikation von z_n mit einer komplexe Zahl kann $\mu(z_n) \in \mathbb{R}$ angenommen werden. Außerdem ist $\mu(z_n) \neq 0$ für $n \geq n_0$. Wegen

$$\|z_n + z_m\|^2 + \|z_n - z_m\|^2 = 2\|z_n\|^2 + 2\|z_m\|^2$$

(Parallelogrammgesetz für $\langle \ , \ \rangle$) ist (z_n) eine Cauchyfolge und konvergiert gegen einen Vektor $w \in H$. Schließlich lässt sich $\mu(z) = \langle w, z \rangle$ für alle $z \in H$ zeigen.

Für stetige $A \in \mathcal{B}(H)$ ist auch die Adjungierte

$$\operatorname{Ad} A : H' \to H', \ \mu \mapsto \mu \circ A,$$

wohldefiniert, stetig und linear: Mit $\mu \in H'$ ist $\mu \circ A$ stetig und linear. Und es gilt $\|\operatorname{Ad} A(\mu)\| \leq \|\mu \circ A\| \, \|\mu\| \, \|A\|$, also $\|\operatorname{Ad} A\| \leq \|A\|$.

Wie in den Paragrafen 42 und 44:

(46.7) Definition–Satz:

1° Für $A \in \mathcal{B}(H)$ ist $A^\star : H \to H$ wohldefiniert über

$$\langle Az, w \rangle = \langle z, A^\star w \rangle$$

für alle $z, w \in H$. $A^\star$ ist linear und beschränkt mit $\|A^\star\| = \|A\|$. Es gilt außerdem $j \circ A^\star = \operatorname{Ad} A \circ j$.

2° $^\star : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$, $A \mapsto A^\star$, ist semilinearer, isometrischer $\mathbb{R}$–Isomorphismus mit $A^{\star\star} = A$ und $(A \circ B)^\star = B^\star \circ A^\star$. Insbesondere ist * stetig mit Norm 1 und stetiger Umkehrabbildung *.

3° $A \in \mathcal{B}(H)$ heißt *selbstadjungiert*, wenn $A = A^\star$ gilt.

4° $A \in \mathcal{B}(H)$ heißt *normal*, wenn $A \circ A^\star = A^\star \circ A$ gilt.

Die Beweise zu 46.7 lassen sich aus denen zu 44.2 ablesen.