§ 46 Lineare Operatoren in Hilberträumen

Zusammenfassung

Es geht jetzt um selbstadjungierte Operatoren auf unendlichdimensionalen Hilberträumen, nachdem der endlichdimensionale Fall in den §§ 42 und 44 abgehandelt worden ist. Um den allgemeinen Fall behandeln zu können, benötigen wir erst einmal ein tiefergehendes Verständnis von den Operatoren, die untersucht werden sollen. Für die Anwendungen in der Quantenmechanik und in der Theorie der Differentialgleichungen stehen die selbstadjungierten beschränkten und die selbstadjungierten unbeschränkten Operatoren um Vordergrund. Wir behandeln hier nur den Fall beschränkter (d.h. stetiger) Operatoren, weil der Umfang der Darstellung kurz gehalten werden soll. Deshalb studieren wir in Teil A zunächst die Stetigkeit bzw. Beschränktheit von linearen Abbildungen auf Hilberträumen, dann wird in Teil B der Darstellungssatz von Riesz (42.1) (44.1) behandelt, um die Selbstadjungiertheit von beschränkten linearen Operatoren zu definieren. Nach einigen Beispielen von normalen und selbstadjungierten Operatoren in Teil C wird der Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren in Teil D vorgestellt. Über das Studium von orthogonalen Projektionen und Scharen von solchen Operatoren tasten wir uns schließlich in Teil E an den Spektralsatz für allgemeine selbstadjungierte beschränkte Operatoren auf Hilberträumen heran.

A. Stetige und beschränkte Operatoren auf normierten Räumen

Im folgenden sind $X, Y, \ldots$ normierte Räume über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und es sind $H, H_1, \ldots$ Hilberträume.

(46.1) Lemma-Definition: Sei $\Omega \subset X$ eine Teilmenge, $A : \Omega \to Y$ eine Abbildung.

1° A ist in $x \in \Omega$ *stetig*, wenn für alle konvergenten Folgen (x_n), $x_n \in \Omega$, mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gilt: $\lim_{n\to\infty} A(x_n) = A(x)$.

2° A ist (auf Ω) *stetig*, wenn A in allen $x \in \Omega$ stetig ist.

3° Es gilt: A in $x \in \Omega$ stetig $\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 \; \forall y \in \Omega : \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|A(x) - A(y)\| < \varepsilon \quad \big(\iff \; A(B(x,\delta)) \subset B(A(x),\varepsilon)\big)$.

4° A ist stetig auf $\Omega = X \quad \iff \quad \forall\, U \subset Y : U$ offen $\Rightarrow A^{-1}(U) \subset X$ offen.

Beweis von 3°: „$\Rightarrow$“ Andernfalls existiert ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem $\delta = \frac{1}{n}$ ein $x_n \in \Omega \cap B(x,\delta)$ mit $\|A(x_n) - A(x)\| \geq \varepsilon$. Also $x_n \in \Omega$ mit $x_n \to x$ und $A(x_n)$ konvergiert nicht gegen $A(x)$ im Widerspruch zu Stetigkeit nach 1°.

„$\Leftarrow$“ Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gibt $\delta > 0$ mit $A(B(x,\delta)) \subset B(A(x),\varepsilon)$. Sei $n_0 \in N$ mit $\|x_n - x\| < \delta$ für $n > n_0$. Dann $\|A(x_n) - A(x)\| < \varepsilon$, also $A(x_n) \to A(x)$.

Beweis von 4°: „⇒“ Sei $U \subset Y$ offen und $x \in A^{-1}(U)$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B(A(x), \varepsilon) \subset U$, denn U ist offen. Wegen der Stetigkeit von A gibt es $\delta > 0$ mit $A(B(x,\delta)) \subset B(A(x),\varepsilon)$, also $B(x,\delta) \subset A^{-1}(U)$. Daher ist $A^{-1}(U)$ offen.

„⇒“ Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $A^{-1}(B(A(x),\varepsilon))$ offen, also existiert $\delta > 0$ mit $B(x,\delta) \subset A^{-1}(B(A(x),\varepsilon))$. Daher ist A in x stetig.

(46.2) Lemma:
Für lineare Abbildungen $A : X \to Y$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1° A ist stetig (in ganz X).
2° A ist in $0 \in X$ stetig.
3° $\|A\| := \sup\{\|Ax\| : x \in X \text{ und } \|x\| \le 1\} < \infty$.
4° A ist *beschränkt*, d.h. es gibt $C > 0$ mit $\|Ax\| \le C\,\|x\|$ für alle $x \in X$.

Beweis: „1° ⇒ 2°“ ist trivial.

„2° ⇒ 3°“: Andernfalls gäbe es $x_n \in X$, $\|x_n\| \le 1$, mit $\|Ax_n\| \ge n$. Also für $z_n := \frac{1}{n}x_n : z_n \to 0$, da $\|z_n\| \le \frac{1}{n}$. Es folgte $\|Az_n\| = \frac{1}{n}\|Ax_n\| \ge 1$ im Widerspruch zu $Az_n \to 0$.

„3° ⇒ 4°“: Für $x \ne 0$ sei $z := \frac{x}{\|x\|}$. Wegen $\|z\| \le 1$ ist $\|A(z)\| \le \|A\|$. Es folgt $\|A(x)\| \le \|A\|\|x\|$ für $x \in X$. 4° ist also erfüllt mit $C = \|A\|$.

„4° ⇒ 1°“: Sei (x_n) konvergent mit Limes x, also $\|x_n - x\| \to 0$. Dann ist $\|A(x_n) - A(x)\| = \|A(x_n - x)\| \le C\,\|x_n - x\|$. Also $\|A(x_n) - A(x)\| \to 0$, d.h. (Ax_n) konvergiert gegen $A(x)$.

(46.3) Bemerkungen und Beispiele:

1° $\|A\|$ in 3° ist die kleinste Konstante $C > 0$ mit $\|Ax\| \le C\,\|x\|$ für alle $x \in X$.

2° H sei Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle\, , \,\rangle$. Für jeden Vektor $w \in H$ ist $j_w : H \to \mathbb{K}$, $j_w(v) = \langle w, v\rangle$, $\mathbb{K}$-linear und stetig. Denn $|j_w(v)| = |\langle w, v\rangle| \le \|w\|\,\|v\|$ für alle $v \in H$. Also $\|j_w\| \le \|w\|$, d.h. j_w ist beschränkt und daher stetig. Im übrigen ist $\|j_w\| = \|w\|$ wegen

$$\left| j_w(\frac{w}{\|w\|}) \right| = \frac{1}{\|w\|}\langle w, w\rangle = \|w\|\,.$$

3° $\mu : \ell_2 \to \mathbb{K}$ sei stetig und linear. Dann ist $\mu(\sum_{k=0}^{\infty} z_k e_k) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k \mu(e_k)$. Also bestimmt μ eine Folge $w = w(\mu) := (\mu(e_k)) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Interessant ist es, zu wissen, welche Folgen auf diese Weise auftreten. Mit Methoden aus der Analysis lässt sich mit einiger Mühe zeigen, dass für eine Folge $w = (w_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sämtliche Summen $\sum_{k=0}^{\infty} z_k w_k\,, z \in \ell_2$, genau dann konvergieren, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |w_k|^2 < \infty$ ist. Es ist dann $\mu(z) = \langle \overline{w}, z\rangle = j_{\overline{w}}(z)$, $w = w(\mu)$.

4° Nicht alle linearen Abbildungen sind stetig: In ℓ_2 sei $a := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_k$. Es ist $a \notin \operatorname{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$. Die Zuordnung $\nu(a) = 1$ und $\nu(e_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ liefert eine lineare Abbildung $\nu : \operatorname{span}\{a\} \cup \{e_k : k \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{K}$, $\nu(za + \sum_{k=0}^{n} z_k e_k) = z$.

Diese lineare Abbildung hat eine lineare Fortsetzung auf ganz ℓ_2 (um das zu zeigen, braucht man das Lemma von Zorn), die wir wieder mit ν bezeichnen. $\nu : \ell_2 \to \mathbb{K}$ ist nicht stetig, da $\nu(a) = 1$ und $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} e_k = a$, aber $\nu(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} e_k) = 0$, also $\lim_{n\to\infty} \nu(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} e_k) = 0 \neq \nu(a) = 1$.

5° Mit der nicht stetigen Linearform $\nu : \ell_2 \to \mathbb{K}$ aus 4° ist $A(x) = \nu(x)b$, für jeden Vektor $b \in H \setminus \{0\}$ nicht stetig als lineare Abbildung $A : \ell_2 \to \ell_2$. Die Mehrzahl der linearen Abbildungen $\ell_2 \to \ell_2$ ist nicht stetig.

6° Unitäre Transformationen $R : H \to H$ sind beschränkt: $\|R\| = 1$. Das gilt ebenso für orthogonale Projektionen $P \neq 0 : \|P\| = 1$.

46.4 Satz: Sei $\mathcal{B}(X, Y)$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum der beschränkten linearen Operatoren von X nach Y. $\mathcal{B}(X, Y)$ hat $A \longmapsto \|A\|$ als Norm (vgl. 46.2.3°). Es gilt $\|A \circ B\| \leq \|A\| \, \|B\|$ für $A \in \mathcal{B}(X, Y), B \in \mathcal{B}(W, X)$. Ist Y vollständig, also Banachraum, so ist $\mathcal{B}(X, Y)$ vollständig, also Banachraum.

Beweis: $\|A\|$ ist eine Norm auf $\mathcal{B}(X, Y)$: Zunächst ist $\|A\| \geq 0$ und für A mit $\|A\| = 0$ ist $\|Ax\| = 0$ für alle $x \in X$, also $A = 0$. Es ist

$$\|\lambda A\| = \sup\{\|\lambda A(x)\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{|\lambda| \, \|Ax\| : \|x\| \leq 1\} = |\lambda| \, \|A\|$$

und

$$\|A + B\| = \sup\{\|(A + B)(x)\| : \|x\| \leq 1\} \leq \sup\{\|Ax + Bx\| : \|x\| \leq 1\} \leq \|A\| + \|B\| \, .$$

Ferner

$$\|A \circ B\| = \sup\{\|A \circ B(w)\| : \|w\| \leq 1\} \leq \sup\{\|A\| \, \|Bw\| : \|w\| \leq 1\} = \|A\| \, \|B\| \, .$$

Sei (A_n) eine Cauchyfolge in $\mathcal{B}(X; Y)$, also existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 mit $\|A_n - A_m\| < \varepsilon$ für $n, m \geq n_0$. Dann ist für jedes $x \in X$ auch $(A_n x)$ eine Cauchyfolge in Y, denn $\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \, \|x\|$. Sei $A(x) := \lim_{n\to\infty} A_n x$ für $x \in X$. Dieser Limes existiert stets, weil Y vollständig ist. Man sieht, dass A linear ist: $A(x + \lambda y) = \lim_{n\to\infty} A_n(x + \lambda y) = \lim_{n\to\infty} A_n x + \lambda \lim_{n\to\infty} A_n y = Ax + \lambda(Ay)$. A ist auch stetig: $(\|A_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, $\|A_n\| \leq M$, da $\|A_n\| \leq \|A_{n_0}\| + \|A_n - A_{n_0}\|$. Es folgt $\|Ax\| = \lim \|A_n x\| \leq \sup \|A_n\| \, \|x\| \leq M \, \|x\|$, also ist A beschränkt. Schließlich: $A_n \to A$ in der Operatornorm. Es gilt $\|A_n x - A_m x\| \leq \varepsilon$ für $n, m \geq n_0$, $\|x\| \leq 1$. Also: $\|Ax - A_m x\| \leq \varepsilon$ für $m \geq n_0$ und $\|x\| \leq 1$, da $A_n x \to Ax$. Daher $\|A - A_m\| \leq \varepsilon$ für $m \geq n_0$.

(46.5) Folgerungen

1° $X' := \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, der *„topologische“ Dualraum* ist ein Banachraum. ($X^* = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{K})$ ist der *„algebraische“* Dualraum; $X' \neq X^*$ im unendlichdimensionalen Fall).

2° $\mathcal{B}(X) := \{ A : X \to X \,|\, A \text{ linear und beschränkt } \}$ ist die Algebra der beschränkten Operatoren $X \to X$. Wenn X vollständig ist, ist $B(X)$ Banachraum.

3° Ist $X = H$ Hilbertraum, so ist $\mathcal{B}(H)$ ein Banachraum, aber für $\dim H \geq 2$ ist $\mathcal{B}(H)$ nicht Hilbertraum, dh. die Norm kann nicht von einem Skalarprodukt kommen.