§45 Hilberträume

Zusammenfassung

Unter dem Begriff Hilbertraum werden solche euklidische oder unitäre Vektorräume zusammengefasst, die auch noch vollständig sind. Damit werden die in § 41, 42 und in § 43, 44 parallel entwickelten Begriffe und Resultate einer einheitlichen Behandlung zugänglich. In diesem und dem nächsten Paragrafen geht es hauptsächlich um unendlichdimensionale Hilberträume, die jetzt über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ gleichzeitig behandelt werden. Naturgemäß treten jetzt Fragen der Konvergenz und der Stetigkeit in den Vordergrund.

A. Der Begriff des Hilbertraumes

Im folgenden steht $\mathbb{K}$ für den Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

(45.1) Definition: Unter einem *Prähilbertraum* verstehen wir einen euklidischen oder einen unitären Vektorraum $(V, < \, , \, >)$

Ein Prähilbertraum V ist insbesondere ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. V ist in natürlicher Weise (vgl. 41.3 und 43.1) ein normierter Vektorraum mit der Norm

$$\|v\| = \sqrt[2]{<v, v>}\,.$$

(45.2) Topologie normierter Räume: Es sei X ein normierter Raum mit der Norm $\| \; \|$.

1° Jede *offene Kugel* $\mathrm{B}(v, r) := \{w \in X : \|v - w\| < r\}$ um $v \in X$ mit dem Radius r ist definitionsgemäß eine *offene Menge* in der durch die Norm gegebenen Topologie. Die weiteren *offenen Teilmengen* $U \subset X$ sind nach Definition genau die Mengen mit der Eigenschaft: Zu jedem $x \in U$ gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $\mathrm{B}(x, \epsilon) \subset U$. Der gesamte Raum X und die leere Menge $\emptyset$ sind offene Mengen, und es gilt: Beliebige Vereinigungen von offenen Mengen aus X und endliche Durchschnitte von offenen Mengen sind wieder offene Teilmengen von X.

2° Eine Menge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $X \backslash A$ offen ist. X und die leere Menge $\emptyset$ sind die einzigen Teilmengen von X, die zugleich offen und abgeschlossen sind. Beliebige Durchschnitte von abgeschlossenen Mengen aus X und endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen sind wieder abgeschlossene Teilmengen von X.

3° Der *offene Kern* einer Teilmenge $D \subset X$ ist die Menge $\mathring{D} := \{x \in D :$ es gibt ein $r > 0$ mit $\mathrm{B}(x, r) \subset D\}$. $\mathring{D}$ ist stets offen und für offene D gilt $D = \mathring{D}$. $\mathring{D}$ ist die Vereinigung aller offenen Teilmengen $U \subset X$, die in D enthalten sind.

4° Die *abgeschlossene Hülle* einer Teilmenge $A \subset X$ ist die Menge $\overline{A} := \{x \in X :$ für alle $r > 0$ ist $\mathrm{B}(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$. $\overline{A}$ ist stets abgeschlossen und für abgeschlossene Teilmengen $A \in X$ gilt $A = \overline{A}$. $\overline{A}$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen

Teilmengen von X, die A enthalten.

$$\overline{A} = \bigcap \{B \subset X : A \subset B \text{ und } B \ \ \textit{abgeschlossen}\}.$$

5° Zum Beispiel ist der *Rand* $\partial B := \overline{B} \backslash \mathring{B}$ der Menge $B \subset X$ eine abgeschlossene Menge. Es gilt $\partial \mathrm{B}(x,r) = \{y \in X : \|x - y\| = r\}$.

6° Eine Menge $D \subset X$ heißt *dicht* in X, wenn $\overline{D} = X$, wenn also die abgeschlossene Hülle von D schon ganz X ist. Beispielsweise ist $D = X$ trivialerweise dicht in X. Weiterhin ist als ein prominentes Beispiel $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, und ebenso ist $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{C}$.

7° X heißt *separabel*, wenn es eine abzählbare und dichte Menge in X gibt. Beispielsweise ist jeder eindimensionale Hilbertraum separabel, da isomorph zu $\mathbb{K}$. Ebenso sind die endlichdimensionalen normierten Räume separabel, da isomorph zu $\mathbb{K}^n$. Auch $\ell_2 = \ell_2(\mathbb{K})$ ist separabel, denn $\{\sum_{k=0}^{n} q^k e_k : q^k \in \mathbb{Q}$ bzw. $\in \mathbb{Q}+i\mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$ ist abzählbar und dicht (vgl. 45.3.2°). In der Quantenmechanik interessieren nur die separablen Prähilberträume. Die bisher behandelten konkreten euklidischen oder unitären Vektorräume wie $\mathcal{S}$ oder $\mathcal{C}_{\in}$ sind alle separabel.

(45.3) Folgenkonvergenz in normierten Räumen: Es sei X wieder ein normierter Raum mit der Norm $\| \ \|$.

1° Eine Folge (x_k) von Vektoren $x_k \in X$ *konvergiert gegen* $x \in X$, wenn $\lim_{k\to\infty} \|x - x_k\| = 0$. Notationen: $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ und $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$.

2° In $\ell_2 = \ell_2(\mathbb{K})$ hat man für jeden Vektor $z = (z_k) \in \ell_2$:

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} z_k e_k,$$

wobei e_k der k-te Einheitsvektor $e_k = (\delta_{kj})_{j\in\mathbb{N}}$ ist. Das bedeutet, z ist der Limes der Partialsummen $s_m = \sum_{k=0}^{m} z_k e_k : z = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} z_k e_k$.

Diese Aussage soll hier ausführlich verifiziert werden: Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es wegen der Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|^2$ (das ist die Bedingung, dass $z \in \ell_2$ – d.h. quadratsummierbar – ist) eine natürliche Zahl $M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m > M$ gilt: $\sum_{k=m}^{\infty} |z_k|^2 < \epsilon^2$. Daher gilt $\|z - s_m\|^2 = \|z - \sum_{k=0}^{m} z_k e_k\|^2 = \sum_{k=m+1}^{\infty} |z_k|^2 < \epsilon^2$ und damit $\|z - s_m\| < \epsilon$ für $m > M$, also $z = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} z_k e_k$.

Unter Verwendung von $<e_k, z> = z_k$ für $z = (z_k) \in \ell_2$ hat die gerade bewiesene Konvergenz auch die folgende Darstellungsform:

$$\boxed{z = \sum_{k=0}^{\infty} <e_k, z> e_k}$$

Jeder Vektor z hat also eine eindeutig bestimmte (unendliche und konvergente) Entwicklung nach den Einheitsvektoren (e_k). Wir sprechen in einer solchen Situation von einer *Hilbertbasis* des Raumes ℓ_2. (Vgl. 45.12)

3° Zwei Beispiele in ℓ_2:

(e_k) als Folge ist nicht konvergent, denn für $k \neq l$ ist $\|e_k - e_l\| = \sqrt{2}$. Aber für jeden Vektor $z \in \ell_2$ gilt: $(<e_k, z>)$ ist eine Nullfolge.

$(\frac{1}{k+1} e_k)$ konvergiert gegen $z = (\frac{1}{k+1})$.

4° Für eine Teilmenge A des normierten Raumes sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) A ist abgeschlossen.

ii) $A = \overline{A}$.

iii) Für jede konvergente Folge (a_k) aus A, d.h. $a_k \in A$, gilt $\lim_{k\to\infty} a_k \in A$.

Der Abschluss $\bar{A}$ einer Teilmenge $A \subset X$ hat daher auch die folgende Beschreibung:

$$\overline{A} = \{x \in X : \text{ Es gibt eine konvergente Folge } (a_k) \text{ aus } A \text{ mit } \lim_{k\to\infty} a_k = x\}.$$

Beweis: „i)⇒ii)“ Es gilt stets $A \subset \overline{A}$ nach Definition der abgeschlossenen Hülle. Es muss also $\overline{A} \subset A$ unter der Voraussetzung i) gezeigt werden, oder äquivalent dazu: $X \backslash A \subset X \backslash \overline{A}$. Da $X \backslash A$ nach Voraussetzung offen ist, gibt es für jedes $x \in X \backslash A$ ein $r > 0$ mit $B(x, r) \subset X \backslash A$. Daher gilt $B(x, r) \cap A = \emptyset$, d.h. $x \notin \overline{A}$ also $x \in X \backslash \overline{A}$.

„ii)⇒iii)“ Sei (a_k) eine Folge aus A mit $\lim_{k\to\infty} a_k = x$. Zu jedem $\epsilon > 0$ ist $B(x, \epsilon) \cap \{a_k : k \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$, also $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$, d.h. $x \in \overline{A}$. Wegen $A = \overline{A}$ folgt $x \in A$.

„iii)⇒i)“ Sei $x \in X \backslash A$. Es gibt dann $r > 0$ mit $B(x, r) \subset X \backslash A$. Sonst hätte man $a_k \in B(x, 1/k) \cap A$, und dann $\lim_{k\to\infty} a_k = x$, also nach Voraussetzung iii): $x \in A$ im Widerspruch zur Annahme.

5° Der Untervektorraum $U = \operatorname{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ von ℓ_2 ist nicht abgeschlossen. Denn nach 2° gilt $\overline{U} = \ell_2$, also ist U dicht in ℓ_2, aber es gilt $U \neq \ell_2$.

(45.4) Cauchyfolgen

1° Jede konvergente Folge (x_k) in einem normierten Raum ist eine *Cauchyfolge*, d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\|x_k - x_l\| < \epsilon$ gilt für alle $k, l > n$. In der Tat: Ist $x = \lim x_k$, so gibt es zu diesem ϵ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|x - x_k\| < \epsilon/2$ für alle $k > n$. Also $\|x_k - x_l\| \leq \|x_k - x\| + \|x - x_l\| \leq \epsilon$.

2° Nicht jede Cauchyfolge in einem normierten Raum ist konvergent. Interessant ist das Beispiel einer stetigen Funktionenfolge (ϕ_k) in $\mathcal{C}_2$, die zwar punktweise konvergiert, aber nicht gegen eine stetige Funktion, und die man so einrichten kann, dass (ϕ_k) eine Cauchyfolge in $\mathcal{C}_2$ ist. Ein anderes Beispiel: Jedes Element $z \in \ell_2$ ist Grenzwert einer Folge von endlichen Linearkombinationen von Standardeinheitsvektoren. Für $z \notin U := \operatorname{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ definiert man so eine Cauchyfolge in U die in U keinen Grenzwert hat. Es gilt im übrigen $U = \iota(\mathbb{K}[T])$ für die natürliche Einbettung von $\mathbb{K}[T]$ in ℓ_2.

3° Hier ein Beispiel aus der Analysis: Für ein kompaktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sei $\mathcal{C} := \{\varphi : I \to \mathbb{K} | \varphi \text{ stetig } \}$. Auf $\mathcal{C}$ ist durch

$$\|\varphi\|_\infty := sup\{|\varphi(x)| : x \in I\}$$

eine Norm definiert. Es gilt $\lim_{k\to\infty} \|\varphi_k - \varphi\|_\infty = 0$ genau dann, wenn (φ_k) gleichmäßig gegen φ konvergiert. Insofern ist die Vollständigkeit von $\mathcal{C}$ gleichbedeutend mit der Aussage: „Der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge von stetigen Funktionen ist wieder stetig.“ Und diese Aussage ist ein Satz der Analysis.

(45.5) Definition:

1° Ein normierter Raum X heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge aus X in X einen Limes hat. Ein vollständiger normierter Raum wird auch als *Banachraum* bezeichnet.

2° Ein *Hilbertraum* ist ein vollständiger Prähilbertraum.

(45.6) Bemerkungen und Beispiele:

1° Jeder Hilbertraum ist auch ein Banachraum.

Die Umkehrung gilt nicht. Es gibt viele Banachräume, deren Norm nicht von einem Skalarprodukt kommen kann. Das trifft beispielsweise zu für die Ebene mit der Maximumsnoem: $X = \mathbb{R}^2$ mit $\left\|(x,y)^\top\right\| = \max\{|x|, |y|\}$ oder $\left\|(x,y)^\top\right\| = |x| + |y|$.

Im übrigen kann eine Norm genau dann als eine euklidische oder unitäre Norm beschrieben werden, wenn das *Parallelogrammgesetz* erfüllt ist:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

2° Endlichdimensionale Prähilberträume $(V, < \, , >)$ sind immer auch Hilberträume. Sie sind vollständig, da $(V, < \, , >)$ isometrisch isomorph ist zu $\mathbb{K}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Einen isometrischen Isomorphismus erhält man durch Festlegung einer ONB $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ von $(V, < \, , >)$ durch:

$$\phi : V \longrightarrow \mathbb{K}^n , \quad \phi(\sum_{i=1}^n z^i b_i) := \sum_{i=1}^n z^i e_i .$$

Diese isometrischen Isomorphismen werden durch die Gesamtheit der ONBs, also durch die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n)$ (vgl. 41.12) bzw. durch die unitäre Gruppe $\mathrm{U}(n)$ (vgl. 43.12) parametrisiert.

3° $\ell_2(\mathbb{K})$ ist ein unendlichdimensionaler Hilbertraum.

4° Die in den Paragrafen 41 und 43 beschriebenen Funktionenräume $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, $\mathcal{C}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ und $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ sind allesamt Prähilberträume, die nicht vollständig sind.

5° Ein abgeschlossener Untervektorraum U eines Banachraumes X ist ein vollständiger normierter Raum bezüglich der Restriktion der Norm: Sei (u_n) eine Cauchyfolge in U, dann ist (u_n) auch Cauchyfolge in X und konvergiert daher in X gegen ein $x \in X$. Da U abgeschlossen ist, gilt $x \in U$ (vgl. 45.3.4°), also konvergiert (u_n) in U gegen x.

B. Vervollständigung normierter Räume

(45.7) Definition: Eine lineare Abbildung $f : X \to Y$ zwischen normierten Räumen heißt *Isometrie*, wenn $\|f(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in X$ gilt.

(45.8) Bemerkungen und Beispiele:

1° Eine Isometrie f ist stets injektiv, denn aus $f(x) = 0$ folgt sofort $x = 0$. Im endlichdimensionalen Fall gleicher Dimension folgt daraus bekanntlich, dass f auch surjektiv ist.

2° Ein einfaches Beispiel einer nicht surjektiven Isometrie: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$, $z \mapsto (z, 0)$. Ein weiteres Beispiel ist der „Shift“ $S : \ell_2(\mathbb{K}) \to \ell_2(\mathbb{K})$, $e_k \mapsto e_{k+1}$. Im Zusammenhang der Vervollständigung von Prähilberträumen zu Hilberträumen ist das folgende Beispiel typisch: $\mathbb{K}[T] \to \ell_2(\mathbb{K})$, $P = \sum P_k T^k \mapsto (P_k)$, vgl. 41.1.4°, 43.1.4°.

3° Im Falle von Prähilberträumen X, Y mit Skalarprodukten $< \, , >_X, < \, , >_Y$ ist eine lineare Abbildung $f : X \to Y$ genau dann isometrisch ($\|f(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in X$), wenn $<f(x), f(z)>_X = <x, z>_Y$ für alle $x, z \in X$ gilt.

(45.9) Satz (Vervollständigung): Sei X ein normierter Raum mit der Norm $\| \ \|$.

1° Es gibt eine Isometrie $i : X \to \hat{X}$ in einen Banachraum $\hat{X}$, so dass $i(X) = \operatorname{Im} i$ dicht in $\hat{X}$ ist.

2° Die Isometrie $i : X \to \hat{X}$ ist im folgenden Sinne eindeutig bestimmt: Ist $j : X \to \tilde{X}$ eine weitere Isometrie, so dass $j(X)$ dicht in $\tilde{X}$ ist, so gibt es einen eindeutig bestimmten isometrischen Isomorphismus $\Phi : \hat{X} \to \tilde{X}$ mit $j = \Phi \circ i$.

3° Falls die Norm von X von einem euklidischen bzw. von einem hermiteschen Skalarprodukt $< \, , >$ auf X kommt, d.h. $\| \ \| = \sqrt{< \, , >}$, so gibt es ein eindeutig bestimmtes hermitesches Skalarprodukt $< \, , >_{\hat{X}}$, welches entsprechend die Norm auf $\hat{X}$ liefert (und für das $<x, y> = <i(x), i(y)>_{\hat{X}}$ für $x, y \in X$ erfüllt ist).

Beweis: 3° Die Eindeutigkeit ergibt sich aus der Stetigkeit des Skalarprodukts (das ist Thema des ersten Abschnitts im § 46): Zu $x, y \in \hat{X}$ gibt es Folgen $(x_n), (y_n)$ in X mit $\lim i(x_n) = x, \lim i(y_n) = y$, also

$$<x, y>_{\hat{X}} = <\lim i(x_n), \lim i(y_n)>_{\hat{X}} = \lim <i(x_n), i(y_n)>_{\hat{X}} = \lim <x_n, y_n>_X,$$

d.h. $<x, y>_{\hat{X}}$ ist durch die Folge $(<x_n, y_n>_X)$ vollständig bestimmt. Da für weitere Folgen $(x'_n), (y'_n)$ aus X mit $\lim i(x'_n) = x, \lim i(y'_n) = y$ die Differenzen $(x_n - x'_n), (y_n - y'_n)$ Nullfolgen sind, gilt: $\lim <x_n, y_n>_X = \lim <x'_n, y'_n>_X$. Daher liefert die obige Gleichung auch eine Definition von $< \, , >_{\hat{X}}$. Es ist leicht nachzurechnen, dass diese Definition wirklich ein euklidisches bzw. hermitesches Skalarprodukt ist.

2° Unter den angegebenen Voraussetzungen wird Φ folgendermaßen definiert: Zu $x \in X$ wähle man eine Folge (x_n) in X mit $\lim_{n \to infty} i(x_n) = x$. Dann ist $(j(x_n))$ eine Cauchyfolge in $\tilde{X}$, da $\|i(x_n) - i(x_m)\| = \|x_n - x_m\| = \|j(x_n) - j(x_m)\|$. Also hat $(j(x_n))$ einen Grenzwert, den wir mit $\Phi(x)$ bezeichnen. Dieser Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der konvergenten Folge, denn für eine weitere Folge (x'_n) aus X mit Grenzwert $x = \lim j(x'_n)$ ist $(x_n - x'_n)$ wieder Nullfolge. Die Zuordnung $\Phi : \hat{X} \to \tilde{X}$ ist linear und isometrisch, wie man leicht nachprüft, also auch injektiv. Da $j(X)$ in $\tilde{X}$ dicht ist, ist Φ schließlich auch surjektiv.

3° Konstruktion von $\hat{X}$: Die Menge $\mathrm{CF}(X)$ der Cauchyfolgen aus X ist ein Untervektorraum des Vektorraums aller Folgen $X^{\mathbb{N}}$, also insbesondere ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Sei N der Untervektorraum von $\mathrm{CF}(X)$ aller Cauchyfolgen, die gegen $0 \in X$ konvergieren. Sei jetzt $\hat{X}$ der Quotientenraum $\hat{X} := \mathrm{CF}(X)/N$. Mit (x_n) ist auch $\|x_n\|$ eine Cauchyfolge in X, also konvergent in $\mathbb{K}$, und wir setzen für die Äquivalenzklasse $[(x_n)] = (x_n) + N$:

$$\|[(x_n)]\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| .$$

Diese Größe ist wohldefiniert, und man prüft leicht die Normaxiome nach. Damit ist $\hat{X}$ ein normierter Raum. Die Isometrie $i : X \to \hat{X}$ erhält man durch $i(x) := [(x_n)]$ mit $x_n = x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. i ist linear und isometrisch, und für ein Element $[(x_n)] \in \hat{X}$ gilt $\lim_{n\to\infty} i(x_n) = [(x_n)]$ nach Definition von $\hat{X}$ und $\|[(x_n)]\|$. Damit ist der Satz bewiesen.

(45.10) Bemerkungen und Beispiele:

1° Die Eindeutigkeitsaussage in 2° impliziert unter anderem, dass für einen bereits vollständigen normierten Raum, also einen Banachraum X, die Existenzaussage in 1° und damit die Konstruktion im Beweis nichts Neues liefert, denn $i : X \to \hat{X}$ ist dann ein isometrischer Isomorphismus: Die Identität $\mathrm{id}_X : X \to X$ erfüllt die Bedingungen von $j : X \to \tilde{X}$ aus 2°, es gibt also einen eindeutig bestimmten isometrischen Isomorphismus $\Phi : \hat{X} \to \tilde{X} = X$ mit $\mathrm{id}_X = \Phi \circ i$, d.h. $i = \Phi^{-1} \circ \mathrm{id}_X = \Phi^{-1}$ ist isometrischer Isomorphismus und identifiziert $\hat{X}$ mit dem ursprünglichen Banachraum X.

2° ℓ_2 kann vermöge der Abbildung $i : \mathbb{K}[T] \to \ell_2$, $\sum_{k=0}^{n} P_k T^k \mapsto (P_k)$ aufgefasst werden als die Vervollständigung von $\mathbb{K}[T]$, denn i ist isometrisch (41.2.4° bzw. 43.2.4°) und $i(\mathbb{K}[T]) = \mathrm{Im}\, i$, der Unterraum der endlichen Linearkombinationen von Standardeinheitsvektoren $e_k, k \in \mathbb{N}$, ist dicht in ℓ_2.

3° Die Beispiele von Funktionenräumen $\mathcal{S}, \mathcal{C}_2$ aus 41.2 bzw. 43.2 sind alle nicht vollständig. Sie haben beide als Vervollständigung den Hilbertraum der im Sinne von Lebesgue quadratintegrierbaren Funktionen $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ auf R^n. $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ hat $\mathrm{L}_2(I, \mathbb{K})$ als Vervollständigung.

4° Ein abgeschlossener Unterraum V eines vollständigen normierten Raumes X ist vollständig nach 45.6.5°. Wenn X nicht vollständig ist, muss V nicht vollständig sein. Aber eine Vervollständigung $\hat{V}$ von V findet sich in natürlicher Weise in der Vervollständigung von X, nämlich als Abschluss $\hat{V} = \overline{i(V)}$ von V.

Ein vollständiger Untervektorraum ist stets abgeschlossen.

5° Das Konzept der (Cauchy-)Vervollständigung lässt sich übertragen auf metrische Räume.

C. Orthogonalität und Hilbertbasis

(45.11) Satz (Besselsche Ungleichung): Sei $(b_k)_{(k\in\mathbb{N})}$ ein ONS in dem Hilbertraum H, dann gilt für alle $z \in H$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |{<}b_k, z{>}|^2 \leq \|z\|^2 .$$

Beweis: Es gilt für $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq \|z - \sum_{k=0}^{n}{<}b_k, z{>}b_k\|^2 = \|z\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |{<}b_k, z{>}|^2$ wegen ${<}z - \sum_{k=0}^{n}{<}b_k, z{>}b_k, z - \sum_{k=0}^{n}{<}b_k, z{>}b_k{>} = {<}z, z{>} - {<}z, \sum_0^n{<}b_k, z{>}b_k{>} - {<}\sum_0^n{<}b_k, z{>}b_k, z{>} + {<}\sum_0^n{<}b_k, z{>}b_k, \sum_0^n{<}b_k, z{>}b_k{>} = \|z\|^2 - \sum_0^n{<}b_k, z{>}{<}z, b_k{>} - \sum_0^n \overline{{<}b_k, z{>}}{<}b_k, z{>} + \sum_0^n \overline{{<}b_k, z{>}}{<}b_k, z{>} = \|z\|^2 - \sum_0^n |{<}b_k, z{>}|^2$. Daraus folgt die Behauptung.

(45.12) Definition: Sei H ein unendlichdimensionaler Hilbertraum mit Skalarprodukt $< \, , >$. Ein Orthonormalsystem (ONS) (b_k) heißt eine *Hilbertbasis*, wenn jedes Element $v \in H$ die eindeutige Darstellung

$$v = \sum_{k=0}^{\infty}{<}b_k, v{>}b_k$$

hat. Eine Hilbertbasis wird auch *vollständiges Orthonormalsystem genannt*

(45.13) Bemerkungen:

1° Von einer ONB sprechen wir nur im Endlichdimensionalen.

2° Für ein ONS (b_k) ist äquivalent:
i) (b_k) ist Hilbertbasis
ii) Zu jedem $z \in H$ gibt es eindeutig bestimmte $z_k \in \mathbb{K}$ mit $z = \sum z_k b_k$.
Denn ${<}b_k, z{>} = {<}b_k, \sum z_j b_j{>} = \sum{<}b_k, z_j b_j{>}$ wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts. Also ${<}b_k, z{>} = \sum z_j{<}b_k, b_j{>} = z_k$.

3° Eine Hilbertbasis ist im unendlichdimensionalen Fall keine Basis (im algebraischen Sinne), denn es gilt $\mathrm{span}\{b_k : k \in \mathbb{N}\} \neq H$.

4° ℓ_2 hat die Hilbertbasis (e_k) der Standardeinheitsvektoren e_k (vgl. 45.2.3°).

5° Ein ONS (b_k) ist genau dann Hilbertbasis, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |{<}b_k, z{>}|^2 = \|z\|^2$ (Parsevalsche Gleichung).

6° Sei (b_k) eine Hilbertbasis von H. Für $(z_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k b_k \text{ konvergiert} \iff \sum_{k=0}^{\infty} |z_k|^2 < \infty.$$

7° Jeder Hilbertraum H mit Hilbertbasis (b_k) ist nach 6° isometrisch isomorph zu ℓ_2 vermöge:

$$F : H \to \ell_2, \; \sum_{k=0}^{\infty} z_k b_k \;\longmapsto\; \sum_{k=0}^{\infty} z_k e_k.$$

8° Ein Hilbertraum mit Hilbertbasis ist offensichtlich separabel, denn die abzählbare Menge $\{\sum_{k=0}^{n} q_k b_k : n \in \mathbb{N},\ q_k \in \mathbb{Q}\}$ im reellen bzw. $\{\sum_{k=0}^{n} q_k b_k : n \in \mathbb{N},\ q_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\}$ im komplexen Fall, ist dicht in H. Die Umkehrung dieser Aussage vermerken wir ohne Beweis:

(45.14) Satz: Sei H ein Hilbertraum unendlicher Dimension. Genau dann ist H separabel, wenn H eine Hilberbasis besitzt.

Und diese Eigenschaft ist nach 45.12.6° äquivalent dazu, dass H isometrisch isomorph zu ℓ_2 ist.

(45.15) Folgerung: Die in unseren Beispielen auftretenden Funktionenräume haben alle eine Vervollständigung, die eine Hilbertbasis besitzt, denn sie sind separabel: Nach dem Satz von Weierstrass sind z.B. die Polynome mit rationalen Koeffizienten dicht in $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, wenn I eine kompaktes Intervall ist. Es sind verschiedene Hilbertbasen in diesen Situationen konkret bekannt. Als bekanntes Beispiel kann hier die Theorie der Fourierreihen genannt werden.

In der Quantenmechanik ist man nur an separablen Hilberträumen interessiert.

D. Unitäre Operatoren

(45.16) Definition: H sei Hilbertraum.

1° Eine linearer Abbildung $R : H \to H$ heißt *unitär* (oder *unitärer Operator*, wenn R isometrisch und surjektiv ist (vgl. 43.9). Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ spricht man auch von orthogonalen Operatoren (vgl. die unvollständige Definition 41.9).

2° $\mathrm{U}(H) := \{R : H \to H : R \text{ ist unitär } \}$ ist die *unitäre Gruppe.*

Unitäre Operatoren sind injektiv, da isometrisch, also sind sie Isomorphismen: $\mathrm{U}(H) \subset \mathrm{Aut}(H)$. $\mathrm{U}(H)$ ist Untergruppe von $\mathrm{Aut}(H)$: Für $R, S \in \mathrm{U}(H)$ und $T = R \circ S$ gilt $<Tz, Tw> = <R \circ S(z), R \circ S(w)> = <S(z), S(w)> = <z, w>$, also ist $T \in \mathrm{U}(H)$. Außerdem $<R^{-1}(z), R^{-1}(w)> = <R(R^{-1}(z)), R(R^{-1}(w))> = <z, w>$, daher $R^{-1} \in \mathrm{U}(H)$. Insgesamt: $\mathrm{U}(H)$ ist tatsächlich eine Gruppe.

(45.17) Satz: Im Falle eines unendlichdimensionalen separablen Hilbertraumes H Parametrisiert die unitäre Gruppe $\mathrm{U}(H)$ im folgenden Sinne (vgl. 41.12.4° und 43.12.4°):

1° Ist (b_k) eine Hilbertbasis und U unitär, so ist (Ub_k) eine Hilbertbasis.

2° Sind (b_k) und (c_n) Hilbertbasen, so wird durch $Ub_k := c_k, k \in \mathbb{N}$ eine unitäre Abbildung definiert.

E. Orthogonale Projektionen

Die Definitionen und Aussagen 43.14 – 43.17 erfassen die Basiseigenschaften von orthogonalen Projektionen auf einem Hilbertraum. Das Gegenbeispiel 43.14 eines Unterraumes ohne orthogonales Komplement erfährt jetzt eine Erklärung:

(45.18) Satz: U sei ein abgeschlossener Untervektorraum des separablen Hilbertraums H. Dann gibt es eine orthogonale Projektion $P : H \to H$ auf U, d.h. $U = \operatorname{Im} P$, und es gilt $H = U \oplus U^\perp$.

Umgekehrt ist jeder Unterraum U von H, für den $H = U \oplus U^\perp$ gilt, bereits abgeschlossen.

Beweis: U ist als abgeschlossener Unterraum vollständig, und U ist als Unterraum von H separabel. Also ist U ein separabler Hilbertraum. Den endlichdimensionalen Fall haben wir in 41.13 bzw. 43.13 behandelt. Im unendlichdimensionalen Fall besitzt U eine Hilbertbasis (b_k). Setze

$$P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} <b_k, z> b_k.$$

Dann ist P wohldefiniert, da die Summe aufgrund der Besselschen Ungleichung 45.11 konvergiert. P ist linear, wie man unmittelbar nachprüft, und es gilt $P \circ P = P$, da $P(b_k) = b_k$. Aus $P(b_k) = b_k$ folgt weiterhin $U \subset \operatorname{Im} P$, und $\operatorname{Im} P \subset U$ ergibt sich aus der Abgeschlossenheit von U: $w = P(z)$ hat die Darstellung $w = \sum_{k=0}^{\infty} <b_k, z> b_k$, liegt also in $\bar{U} = U$. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} <Pz, w> &= <\sum_0^\infty <b_k, z> b_k, w> && = \sum_0^\infty \overline{<b_k, z>} <b_k, w> \\ &= \sum_0^\infty <z, b_k><b_k, w> && = \sum_0^\infty <z, <b_k, w> b_k> = <z, Pw>, \end{aligned}$$

d.h. P ist eine orthogonale Projektion und $H = U \oplus U^\perp$ ($\operatorname{Ker} P = U^\perp$).

Im Falle von $U \oplus U^\perp$ gibt es die orthogonale Projektion $P : H \to H$ mit $U = \operatorname{Im} P$. Wegen $U = \operatorname{Ker} Q$, für $Q := id_H - P$ ist $U = Q^{-1}(0)$ abgeschlossen.

Achtung: Im Beweis haben wir die Stetigkeit des Skalarproduktes beim „Herausziehen" der Skalare in den unendlichen Summen benutzt. Diese Stetigkeit ist klar aufgrund der Cauchy–Schwarz–Ungleichungen, sie ist im übrigen Thema im nächsten Paragrafen und wird dort noch einmal angesprochen. Einen weiteren Vorgriff auf den nächsten Paragraphen stellt die letzte Zeile des Beweise dar: Urbilder abgeschlossener Mengen unter stetigen Abbildungen sind abgeschlossen.