Mathematisches Institut

§10 Vektorraum. Definition und Beispiele

Der Begriff des Vektorraumes wurde in den letzten Paragrafen entwickelt. Wir wiederholen (vgl. auch 2.3) :

(10.1) Definition: Ein *Vektorraum über dem Körper* K ist eine additive abelsche Gruppe V, also für alle x,y,z aus V

1º (x + y) + z = x + (y + z)
2º Es gibt 0 (*Nullvektor*) mit: x + 0 = x = 0 + x .
3º Zu jedem x aus V existiert -x aus V mit x+(-x) = 0.
4º x + y = y + x

zusammen mit einer *Skalarmultiplikation* $K \times V \to V, (r,v) \mapsto rv$, so dass für alle x,y aus V und alle r,s aus K

5º 1v = v .
6º r(v + w) = rv + rw .
7º (r + s)v = rv + sv .
8º (rs)v = r(sv) .

Mathematisches Institut

(10.2) Bemerkungen: Sei V eine Vektorraum über K. (V wird auch kurz *K-Vektorraum* genannt. Dann gilt für all x aus V und all r aus K:

1º r(0) = 0 (0 ist der Nullvektor.)
2º 0x = 0 (0 ist die Null im Körper K.)
3º (-1)x = -x .
4º (-1)(-1) = 1 und 0r = 0 im Körper K.

(10.3) Definition: Sei V eine Vektorraum über K. Ein *Untervektor-raum* ist eine Menge U in V, die bezüglich der auf V gegebenen Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum über K ist.

Wie für Untergruppen haben wir den Satz:

(10.4) Satz: Sei V eine Vektorraum über K. Eine nichtleere Menge U in V ist genau dann ein Untervektorraum, wenn für alle x,y in U und alle r aus K gilt: x+y, -y und rx liegen in U .

(10.5) Beispiele: Sei V eine Vektorraum über K.

1º {0} und V sind Untervektorräume von V.

2º Sei v aus V\{0} . Dann ist die Menge Kv := {rv : r aus K} ein Untervektorraum von V .

3º {(r,s,0) : r,s aus K} ist ein Untervektorraum von K^3 .

4º Sind U und W Untervektorräume von V, so ist auch der Durchschnitt $U \cap W$ eine Untervektorraum.

5º Für die Vereinigung gilt das in der Regel nicht.

Weitere Beispiele von Vektorräumen:

(10.6) Folgenräume: Es geht um Folgen in der Analysis. Sei F die Menge aller Folgen $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ reeller Zahlen x_k .

1º F ist ein Vektorraum über **R** bezüglich der komponentenweise Addition und Multiplikation.

2º F_b := {x aus F: x ist beschränkt} ist ein Untervektorraum von F.

3º F_k := {x aus F: x ist konvergent} ist ein Untervektorraum von F_b.

4º F_0 := {x aus F: x ist Nullfolge} ist Untervektorraum von F_k.

5º F_{hp} := {x aus F: x hat einen Häufungspunkt in **R**} ist kein Untervektorraum von F.

6º F_e := {x aus F: {x_k : k aus **N**} ist endlich} ist ein Untervektorraum von F_k.

7º F_c := {x aus F: x ist konstant ab einem Index m} ist ein Untervektorraum von F_k und F_e , und zwar der Durchschnitt dieser beiden Untervektorräume.

(10.7) Räume von Abbildungen: Sei K ein Körper und M eine Menge. Die Menge der Abbildungen Abb(M,K) = K^M ist in natürlicher Weise ein K-Vektorraum bezüglich:

(f+g)(m) := f(m) + g(m) ,

(rf)(m) := rf(m) für f,g aus K^M , m aus M und r aus K .

 Mathematisches Institut

Bemerkungen:

1^o Der in 10.6 beschriebene Folgenraum ist $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Allgemeinere Folgenräume (Folgen von Körperelementen aus K) sind die $K^{\mathbf{N}}$.

2^o Auch der Standardraum K^n ist als Abbildungsraum aufzufassen, es handelt sich um K^M für $M = \{1,2, \ldots ,n\}$.

3^o Für einen Vektorraum V über K ist auch $V^{\mathbf{N}}$, der Raum der Folgen in V, ein Vektorraum von Abbildungen.

4^o Für einen Vektorraum V über K ist ganz allgemein V^M ein K-Vektorraum.

5^o Die meisten Vektorräume von Bedeutung in der Analysis sind Untervektorräume von K^M für $K = \mathbf{R}$ oder $K = \mathbf{C}$ **.** Beispielsweise:

(10.7) Stetige und differenzierbare Abbildungen: I sei ein Intervall in $\mathbf{R}$. Dann ist $C(I) := \{f : f \text{ ist aus } \mathbf{R}^I \text{ und } f \text{ ist stetig}\}$ ein Untervektorraum von $\mathbf{R}^I$.

Ferner ist $C^k(I) := \{f : f \text{ ist aus } \mathbf{R}^I \text{ und } f \text{ ist k-mal stetig differenzierbar}\}$ ein Untervektorraum von $C^{k-1}(I)$.