Kapitel II. Vom Raumbegriff zu algebraischen Strukturen

Neubeginn: „Herleitung“ des Begriffs Vektorraum aus intuitiven Vorstellungen über den Raumbegriff und aus Erfahrungen.

§7 Der affine Raum – Teil 1: Punkte und Translationen

Entwicklung eines mathematisch gefassten Raumbegriffs „Affiner Raum“, um zunächst den Gruppenbegriff herzuleiten.

Ausgangspunkt und Handlungsanweisung: 1° – 3° aus §6.

Der affine Raum ist zunächst eine Menge A von Punkten. Dazu gehört eine Menge T von Translationen auf dem Raum A mit einer Reihe von Regeln, und zwar:

(7.1) Axiome:

1° *Transitivität*: Zu jedem Paar (P,Q) von Punkten aus A gibt es eine Translation v aus T, die P im Q überführt. Diese Translation wird mit t(P,Q) bezeichnet.

2° *Translation*: Zu jedem Punkt P aus A und jedem v aus T gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt Q aus A mit t(P,Q) = v.

Zu den Mengen A und T kommt also nach 1° eine Abbildung

$$t : A \times A \to T$$

mit der zusätzlichen Eigenschaft 2°.

Für jeden festen Punkt P aus erhalten wir die Abbildung

$$t_P : A \to T$$

Die Eigenschaft 2° in 7.1 ist gleichbedeutend mit: t_P ist bijektiv.

(7.2) Bemerkung: Äquivalent zu der in 7.1 beschriebenen Struktur ist die Vorgabe von zwei Mengen A und T mit einer Abbildung

$$t : A \times A \to T$$

für die t_P bijektiv ist für alle P aus A.

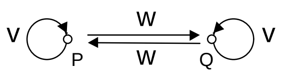
(7.3) Beispiele:

1° Alle Modelle mit 2 Punkten:

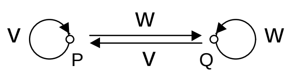
Kapitel II, §7 Mathematisches Institut

Sei A = {P,Q}. Dann ist T = {v,w}.

Modell 1: t(P,P) = t(Q,Q) = v
t(P,Q) = t(Q,P) = w



Modell 2: t(P,P) = t(Q,P) = v
t(P,Q) = t(Q,Q) = w



2° Die Beispiele 5.2.1° und 5.2.2°.

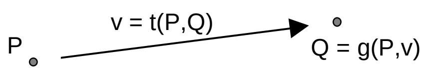
Die Abbildung zusammen mit der Eigenschaft 2°

$$t : A \times A \to T$$

induziert in natürlicher Weise eine Abbildung

$$g : A \times T \to A$$

durch die folgende Festlegung: g(P,v) ist derjenige Punkt Q aus A, der t(P,Q) erfüllt.



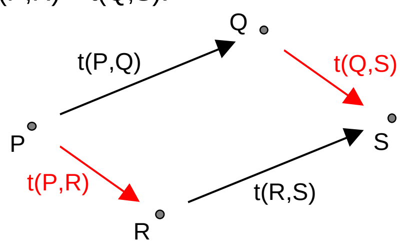
Für jeden festen Punkt P aus A erhalten wir so die Umkehrabbildung von t_P als $g_P : T \to A$, definiert durch $g_P(v) := g(P,v)$ für v aus T.

(7.4) Definition: Ein *Translationsraum* ist gegeben durch eine Abbildung

$$t : A \times A \to T$$

mit den Eigenschaften 1º und 2º, so dass außerdem noch gilt:

3º Für je vier Punkte P,Q,R,S aus A gilt: Aus t(P,Q) = t(R,S) folgt stets t(P,R) = t(Q,S).

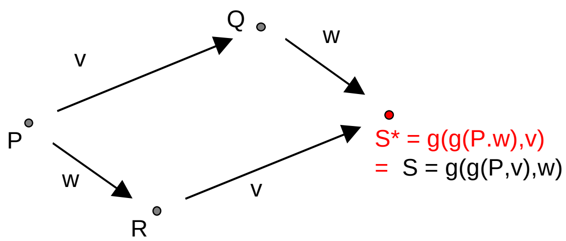


(7.5) Satz: Für einem Translationsraum (A,T,t) gilt t(P,P) = t(Q,Q) für alle Punkte P und Q. Diese Translation wird mit n bezeichnet.

(7.6) Satz: Sei (A,T,t) ein System mit den Eigenschaften 7.1.1º und 7.1.2º . Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

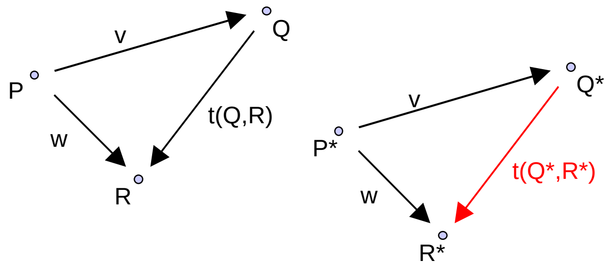
3º Für je vier Punkte P,Q,R,S aus A gilt: Aus t(P,Q) = t(R,S) folgt stets t(P,R) = t(Q,S).

4º Für jeden Punkt P aus A gilt: Für alle v,w aus T ist g(g(P.v),w) = g(g(P,w),v).



(7.7) Satz: Ein Translationsraum (A,T,t) erfüllt auch die folgende Eigenschaft:

5º Seien P,Q,R Punkte aus A mit $v = t(P,Q)$ und $w = t(P,R)$. Für jeden weiteren Punkt P* aus gilt für $Q^* = g(P^*,v)$ und $R^* = g(P^*,w)$ stets $t(Q,R) = t(Q^*,R^*)$.



$\boxed{t(Q,R) = t(Q^*,R^*)}$

Kapitel II, §7 LMU Mathematisches Institut

(7.8) Beispiele: Modell 1 in 7.3.1º ist ein Translationsraum. Modell 2 in 7.3.1º ist kein Translationsraum. 7.3.2º liefert zwei Beispiel von Translationsräumen.

Ein Translationsraum (A,T,t) induziert eine Verknüpfung auf T, die wir im folgenden beschreiben wollen.

Seien v und w Translationen aus T. Zu jedem Punkt P gibt es den Punkt $g(g(P,v),w)$ in A, den man durch eine Translation $v?_P w$ aus T erreichen kann:

$$g(P,v?_P w) = g(g(P,v),w)$$

Also

$$v?_P w := t_P(g(g(P,v),w)) .$$

(7.9) Satz: Für einen Translationsraum (A,T,t) gilt

$$v?_P w = v?_Q w$$

für alle Punkte P und Q aus A.

Daher kann

v?w := v?$_P$w

Unabhängig von der speziellen Wahl von P definiert werden.

(7.8) Satz: Für die Verknüpfung „?‘ auf T zu einem Translations-raum (A,T,t) sind die folgenden Regeln erfüllt:
Für alle Translationen v,w,z aus T gilt:

1º (v?w)?z = v?(w?z).
2º Es gibt n aus T mit v?n = v .
3º Zu jedem v aus T existiert v* aus T mit v?v* = n .

Und dazu

4º v?w = w?v .

1º - 3º sind die Gruppenaxiome.