

Kapitel II. Vom Raumbegriff zu algebraischen Strukturen

Neubeginn: „Herleitung“ des Begriffs Vektorraum aus intuitiven Vorstellungen über den Raumbegriff und aus Erfahrungen.

Folie 1

§7 Der affine Raum – Teil 1: Punkte und Translationen

Entwicklung eines mathematisch gefassten Raumbegriffs „Affiner Raum“, um zunächst den Gruppenbegriff herzuleiten.

Ausgangspunkt und Handlungsanweisung: 1° – 3° aus §6.

Der affine Raum ist zunächst eine Menge A von Punkten. Dazu gehört eine Menge T von Translationen auf dem Raum A mit einer Reihe von Regeln, und zwar:

(7.1) Axiome:

1° *Transitivität*: Zu jedem Paar (P, Q) von Punkten aus A gibt es eine Translation v aus T , die P im Q überführt. Diese Translation wird mit $t(P, Q)$ bezeichnet.

2° *Translation*: Zu jedem Punkt P aus A und jedem v aus T gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt Q aus A mit $t(P, Q) = v$.

Folie 2

Zu den Mengen A und T kommt also nach 1° eine Abbildung

$$t : A \times A \rightarrow T$$

mit der zusätzlichen Eigenschaft 2°.

Für jeden festen Punkt P aus erhalten wir die Abbildung

$$t_P : A \rightarrow T$$

Die Eigenschaft 2° in 7.1 ist gleichbedeutend mit: t_P ist bijektiv.

(7.2) Bemerkung: Äquivalent zu der in 7.1 beschriebenen Struktur ist die Vorgabe von zwei Mengen A und T mit einer Abbildung

$$t : A \times A \rightarrow T$$

für die t_P bijektiv ist für alle P aus A .

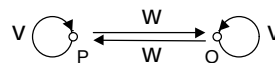
(7.3) Beispiele:

1° Alle Modelle mit 2 Punkten:

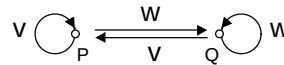
Folie 3

Sei $A = \{P, Q\}$. Dann ist $T = \{v, w\}$.

Modell 1: $t(P, P) = t(Q, Q) = v$
 $t(P, Q) = t(Q, P) = w$



Modell 2: $t(P, P) = t(Q, P) = v$
 $t(P, Q) = t(Q, Q) = w$



2° Die Beispiele 5.2.1° und 5.2.2°.

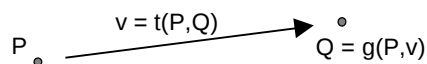
Die Abbildung zusammen mit der Eigenschaft 2°

$$t : A \times A \rightarrow T$$

induziert in natürlicher Weise eine Abbildung

$$g : A \times T \rightarrow A$$

durch die folgende Festlegung: $g(P, v)$ ist derjenige Punkt Q aus A , der $t(P, Q)$ erfüllt.



Folie 4

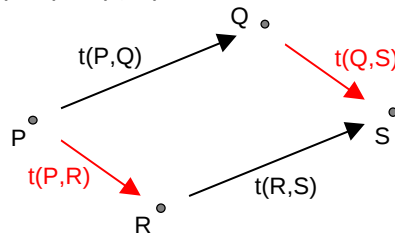
Für jeden festen Punkt P aus A erhalten wir so die Umkehrabbildung von t_P als $g_P : T \rightarrow A$, definiert durch $g_P(v) := g(P, v)$ für v aus T .

(7.4) Definition: Ein *Translationsraum* ist gegeben durch eine Abbildung

$$t : A \times A \rightarrow T$$

Mit den Eigenschaften 1° und 2° zusammen mit

3° Für je vier Punkte P, Q, R, S aus A gilt: Aus $t(P, Q) = t(R, S)$ folgt stets $t(P, R) = t(Q, S)$.



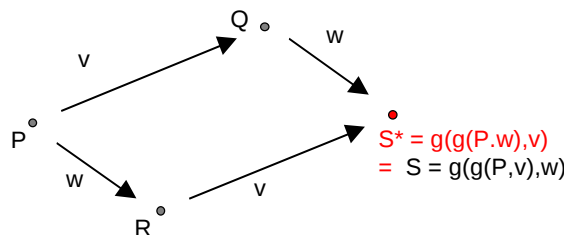
Folie 5

(7.5) Satz: Für einem Translationsraum (A, T, t) gilt $t(P, P) = t(Q, Q)$ für alle Punkte P und Q . Diese Translation wird mit n bezeichnet.

(7.6) Satz: Sei (A, T, t) ein System mit den Eigenschaften 7.1.1° und 7.1.2°. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

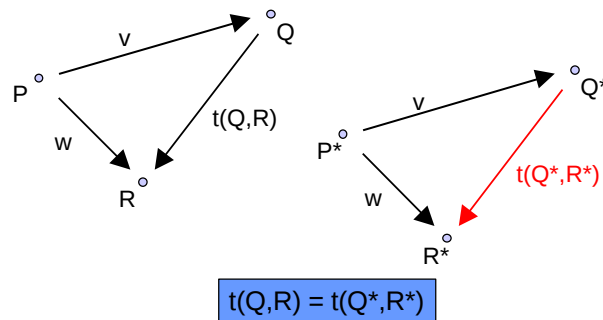
3° Für je vier Punkte P, Q, R, S aus A gilt: Aus $t(P, Q) = t(R, S)$ folgt stets $t(P, R) = t(Q, S)$.

4° Für jeden Punkt P aus A gilt: Für alle v, w aus T ist $g(g(P, v), w) = g(g(P, w), v)$.



(7.7) Satz: Ein Translationsraum (A, T, t) erfüllt auch die folgende Eigenschaft:

5° Seien P, Q, R Punkte aus A mit $v = t(P, Q)$ und $w = t(P, R)$. Für jeden weiteren Punkt P^* aus A gilt für $Q^* = g(P^*, v)$ und $R^* = g(P^*, w)$ stets $t(Q, R) = t(Q^*, R^*)$.



Folie 7

Ein Translationsraum (A, T, t) induziert eine Verknüpfung auf T , die wir im folgenden beschreiben wollen.

Seien v und w Translationen aus T . Zu jedem Punkt P gibt es den Punkt $g(g(P, v), w)$ in A , den man durch eine Translation $v \circ_P w$ aus T erreichen kann:

$$g(P, v \circ_P w) = g(g(P, v), w)$$

Also

$$v \circ_P w := t_P(g(g(P, v), w)) .$$

(7.8) Satz: Für einen Translationsraum (A, T, t) gilt

$$v \circ_P w = v \circ_Q w$$

für alle Punkte P und Q aus A .

Daher kann

$$v \circ w := v \circ_P w$$

Unabhängig von der speziellen Wahl von P definiert werden.

Folie 8

(7.8) Satz: Für die Verknüpfung „ $\cdot$ “ auf T zu einem Translationsraum (A, T, t) sind die folgenden Regeln erfüllt:

Für alle Translationen v, w, z aus T gilt:

$$1^\circ (v \cdot w) \cdot z = v \cdot (w \cdot z).$$

$$2^\circ \text{ Es gibt } n \text{ aus } T \text{ mit } v \cdot n = v.$$

$$3^\circ \text{ Zu jedem } v \text{ aus } T \text{ existiert } v^* \text{ aus } T \text{ mit } v \cdot v^* = n.$$

Und dazu

$$4^\circ v \cdot w = w \cdot v.$$

$1^\circ - 3^\circ$ sind die Gruppenaxiome.