§3 Allgemeine lineare Gleichungssysteme über $\mathbf{R}$. Superposition

(3.1) Definition: Ein *lineares Gleichungssystem* in n Unbestimmten und in m Gleichungen ist:

$$\begin{aligned} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n &= b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \cdots + a_m^n x_n &= b_m \end{aligned}$$

Die a_j^i sind die *Koeffizienten* aus $\mathbf{R}$. Die b_j sind weitere Zahlen, auch die *Konstanten genannt*, und die x_i sind die *Unbestimmten*, bzw. die Unbekannten, die Veränderlichen.

LMU Mathematisches Institut

Andere Schreibweise:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_j^i x_i = b_j$$

für $j = 1,2, \dots m$.

Die Koeffizienten werden zusammengefasst zu einer *Matrix:*

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_m^1 & a_m^2 & \dots & a_m^n \end{pmatrix}$$

(3.2) Matrixoperation:
Eine Matrix A der obigen Form wirkt auf einen Spaltenvektor x auf die folgende Weise:

$$\mathrm{A}x := \begin{pmatrix} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \cdots + a_m^n x_n \end{pmatrix}$$

oder auch

$$\mathrm{A}x := \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=n} a_1^i x_i \\ \sum_{i=1}^{i=n} a_2^i x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{i=n} a_m^i x_i \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Mit dieser Notation hat das lineare Gleichungssystem aus 3.1 die Form:

$$\mathrm{A}x = b$$

Die in 3.2 eingeführte Matrixoperation liefert eine Abbildung

$$\mathrm{L}_\mathrm{A} : \mathbf{R}^\mathbf{n} \to \mathbf{R}^\mathbf{m},\ x \to \mathrm{A}x$$

Die Frage, ob $\mathrm{A}x = b$ eine Lösung hat, lässt sich daher auffassen, ob b in der Bildmenge $\{\mathrm{A}x : x \in \mathbf{R}^\mathbf{n}\}$ von L_A vorkommt.

(3.2) Regel: L_A ist linear, das bedeutet:

$$\mathrm{A}(x + y) = \mathrm{A}x + \mathrm{A}y\,,$$

$$\mathrm{A}(\mathrm{r}x) = \mathrm{r}(\mathrm{A}x)$$

Bezeichnung: $Ax = 0$ heißt das zu $Ax = b$ gehörige *homogene Gleichungssystem.*

(3.3) Satz: Das Prinzip der Superposition

1^o Ist x^o eine Lösung von (3.1) und x eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems, so ist $x^o + x$ eine Lösung von (3.1).

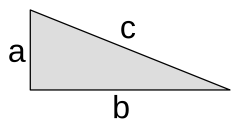
2^o Sind x^o und x^1 Lösungen von (3.1), dann ist $x^o - x^1$ Lösung des zugehörigen homogenen Systems.

LMU Mathematisches Institut

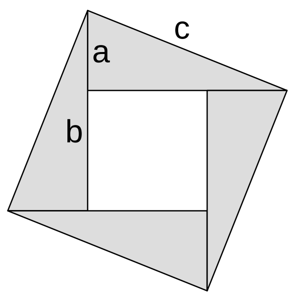
§4 Elementargeometrie

(4.1) Der Satz von Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



1^o (Synthetischer) Beweis:
Aus einem Dreieck werden erst einmal vier Dreiecke.



Diese werden neu gruppiert zu einem Quadrat mit der Fläche

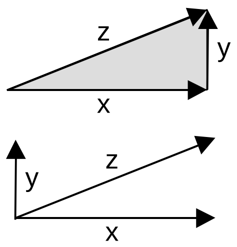
$$\begin{aligned} c^2 &= (b-a)^2 + 4 \bullet ½ab \\ &= b^2 - 2ab + a^2 + 2ab \\ &= b^2 + a^2 \end{aligned}$$

(½ab ist die Dreiecksfläche)

Mathematisches Institut

Wozu dieses Beispiel?
Es soll die Beziehung elementargeometrischer Überlegungen zum Rechnen in Koordinaten herausgearbeitet werden, d.h. zum Rechnen in der analytischen Geometrie.
Daher:

2^o Analytischer Beweis:
Das Dreieck wird durch die Vektoren x, y, z beschrieben:
Mit x = (b,0) und y = (0,a), sowie
z = x + y = (b,a).
Für die Länge c des Vektors z
Gilt daher:



$c = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, also $c^2 = a^2 + b^2$.

Folie 7

Mathematisches Institut

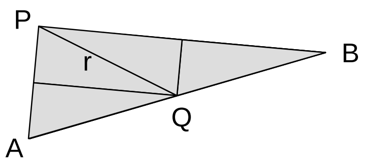
Was ist Voraussetzung für den analytischen Beweis?

1. Identifizierung der „Ebene“ mit $\mathbf{R}^2$.
2. Koordinatenwahl.
3. Verschieben von Punkten entspricht Addition von Vektoren.
4. Skalarprodukt beschreibt Länge und Winkel.

(4.2) Satz von Thales: Für zwei Punkte der Ebene A und B liegt die Menge der Punkte P, von denen aus die Strecke [A,B] im rechten Winkel erscheint auf einer Kreislinie mit [A,B] als Durchmesser.

1^0 Synthetischer Beweis:

r = [P,Q] = [A,Q] = ½[A,B] .



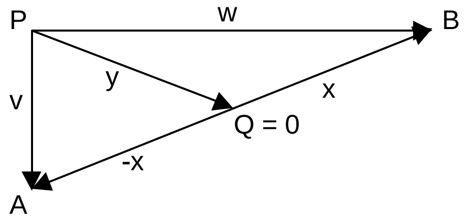
Folie 8

LMU Mathematisches Institut

Dazu ebenso wie zuvor:
2° Analytischer Beweis:

Man wählt den Mittelpunkt Q als den Koordinatenursprung

$v = y - x$ und $w = y + x$ sind nach Voraussetzung senkrecht zueinander. Also:



$\langle v,w\rangle = 0$, d.h. $0 = \langle v,w\rangle = \langle y-x, y+x\rangle = \langle y,y\rangle + \langle y,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle x,x\rangle$

Die Länge von y ist also gleich der Länge von x und damit gleich dem halben Abstand zwischen A und B.

Wesentlich wieder 1° – 4° der vorletzten Folie.

Folie 9

LMU Mathematisches Institut

§5 Die abstrakte affine Ebene

Wesentliche Eigenschaften der Ebene: Die Ebene besteht aus einer Menge von Punkten, es gibt Geraden in der Ebene und zwischen Punkten und Geraden bestehen „Inzidenzrelationen“ mit bestimmten Regeln.

Die Axiome des Mathematikers dazu:

(5.1) Definition: Eine *abstrakte affine Ebene* besteht aus einer Menge A von Punkten, einer Menge G von Geraden und einer Inzidenzrelation |, so dass die folgenden Axiome erfüllt sind:

1° Zu je 2 verschiedenen Punkten P und Q aus A gibt es genau eine Gerade g aus G mit: P|g und Q|g.

2° Zu jedem Punkt P aus A und zu jeder Geraden g aus G gibt es genau eine zu g parallele Gerade h aus G mit P|h .

Folie 10

Dabei heißt g definitionsgemäß *parallel* zu h, wenn h = g ist oder wenn g und h keinen gemeinsamen Punkte haben, das heißt es gibt kein P in A mit P|g und P|h.

3° A hat drei Elemente, die nicht auf einer Geraden liegen.

(5.2) Beispiele:

1° Die Menge der Paare reeller Zahlen als Menge A von Punkten; die Menge G der Geraden (Geradengleichung!) als Geraden des Systems und die Relation „P ist in der Geraden enthalten" als Inzidenzrelation.

2° $A = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, P_i paarweise verschieden,
$G = \{g_{12}, g_{13}, g_{14}, g_{23}, g_{24}, g_{34}\}$, g_{km} paarweise verschieden,
$P_i | g_{km}$ genau dann, wenn i = k oder i = m .

Die Geraden g_{km} kann man sich als die Mengen $\{P_k, P_m\}$ vorstellen.

§6 Zusammenfassung

In der Einleitung wird die Lineare Algebra beschrieben als die abstrakte Theorie

1. Einerseits zur Lösungstheorie der linearen Gleichungssysteme,
2. Andrerseits zur Analytischen Geometrie.

Der zentrale Begriff der Linearen Algebra ist der Vektorraum.

Wir sind in dem Kapitel I bereits auf diesen Begriff gestoßen:

1. Auf die Standardräume in den §§ 2, 3 zur Beschreibung der linearen Gleichungssysteme. Die Vektorraumaxiome sind dabei in 2.3 vorweggenommen.
2. Vektoren treten auch bei der analytischen Behandlung der geometrischen Probleme in §4 auf.

Folgende Eigenschaften sind beim Einsatz von „Vektoren“ in der Geometrie der Ebene (vgl. §4) von zentraler Bedeutung:

1º Punkte P lassen sich „verschieben“ durch Vektoren v mit dem Ergebnis eines neuen Punktes $Q = P + v$. Die Verschiebung nennen wir auch *Translation*.

2º Von einem Punkt P aus lässt sich jeder Punkt Q durch Translation erreichen: Es gilt $Q = P + v$ für einen eindeutig bestimmten Vektor v.

3º Dazu gehören weitere Regeln über Geraden und Parallelität sowie über Längen, Winkel und Flächen.

Die Axiome des fünften Paragrafen interessieren für den Fortgang der Vorlesung nicht weiter, insbesondere kommen keine Translationen vor. Es geht in diesem Paragrafen lediglich darum zu zeigen, wie in der Mathematik recht konkrete Objekte auf abstrakte Weise eingeführt werden können.

Folie 13