Version 31.5.2007 Mai 2007

MIIA – Differentialrechnung mehrerer reeller Veränderlicher – SoSe 2007

Kurzfassung

Martin Schottenloher

$\infty \infty \infty$

Kapitel IX. Kurven und Vektorfelder

Nachdem im vorangehenden Kapitel die topologischen Werkzeuge bereitgestellt worden sind, betreiben wir jetzt Analysis für 1-dimensionale Objekte in Banachräumen E, das sind Kurven in E, also stetige Abbildungen

$$\gamma : [a,b] \to E \,.$$

Es geht also in diesem Kapitel um vektorwertige Differential- und Integralrechnung in einer Veränderlichen.

Auf diese Weise wird die Analysis wiederholt und es wird insbesondere die Theorie der Integration gefestigt und erweitert. Schließlich werden Vektorfelder – oder besser aus mathematischer Sicht Pfaffsche Formen – längs Kurven integriert und es ergibt sich ein natürlicher Zusammenhang und eine nachhaltige Motivation zur Differentialrechnung mehrerer Veränderlichen durch die Potentialfunktionen, die dabei auftreten, und ihre Gradienten.

Im folgenden ist E stets ein Banachraum über $\mathbb{R}$ oder über $\mathbb{C}$ mit der Norm $\| \ \|$, und es ist $[a,b]$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. In vielen Fällen ist es interessant genug den Fall $E = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm zu betrachten.

§25 Kurven und ihre Länge

(25.1) Definition: Eine *Kurve in* E ist eine stetige Abbildung

$$\gamma : [a,b] \to E \,.$$

Eine *Kurve in* Ω für eine Teilmenge $\Omega \subset E$ ist eine Kurve in E, die auch noch $\gamma([a,b]) \subset \Omega$ erfüllt.

Statt „Kurve“ wird auch der Ausdruck „Weg“, „parametrisierte Kurve“, „parametrisierter Weg“ oder „Bewegung“ verwendet. Das soll hier in der Vorlesung stets den gleichen Begriff bezeichnen.

Die *Spur* einer Kurve ist das Bild

$$C_\gamma = \gamma^* := \{\gamma(t) \,|\, t \in [a,b]\} \,.$$

Statt Spur sind auch die Ausdrücke „Kurvenbogen“, „Bogen“, „Orbit“ oder „Bahn“ geläufig.

Die Spur γ^* wird durch γ *parametrisiert* und man spricht davon, dass γ eine *Parametrisierung von* γ^* ist. γ^* als Punktmenge hat in der Regel viele verschiedene Parametrisierungen.

Für einen Punkt $\gamma(t) \in \gamma^*$ ist t der (bzw. ein) *Parameter* des Punktes $\gamma(t)$. Der Parameter ist nur eindeutig, wenn γ injektiv ist.

Die Spur einer Kurve ist das eigentliche 1-dimensionale Objekt.

Zur Bedingung der Stetigkeit: γ ist stetig in $t \in [a,b]$ (nach Kap. XIII), wenn für alle Folgen (t_k) in $[a,b]$ aus $t_k \longrightarrow t$ stets $\gamma(t_k) \longrightarrow \gamma(t)$ folgt, also $\|\gamma(t_k) - \gamma(t)\| \longrightarrow 0$.

(25.2) Beispiele:

1° Für zwei Vektoren $x, y \in E$, $x \neq y$, ist $\gamma(t) = tx + (1-t)y = y + t(x-y)$, $t \in [0,1]$, offensichtlich eine Kurve, die das Geradenstück S von y nach x parametrisiert. S ist die Spur $S = \gamma^*$ von γ. Eine andere Parametrisierung von S ist $\gamma(t) = t^2x + (1-t^2)y$, $t \in [0,1]$. Eine weitere Parametrisierung ist $t \mapsto x + t(y-x)$, $t \in [0,1]$, $t \in [0,1]$, die dasselbe Geradenstück S als eine Bewegung von x nach y darstellt.

2° Die Kreislinie $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ hat die Parametrisierung $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, oder $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, $t \in [0,1]$. Auch $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ oder $\gamma(t) = (\sin 2t, \cos 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$, sind Parametrisierungen von $\mathbb{S}^1$, bei denen allerdings jeder Punkt der Kreislinie doppelt durchlaufen wird. Schließlich ist für jede stetige und surjektive Abbildung $\theta : [a,b] \to [0, 2\pi]$ durch $\gamma(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t)) = e^{i\theta(t)}$, $t \in [a,b]$, eine Parametrisierung der Kreislinie gegeben.

3° Die Ellipse $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (\frac{x}{A})^2 + (\frac{y}{B})^2 = 1\}$ mit den „Halbachsen“ $A, B > 0$ hat die Parametrisierung $\gamma(t) = (A\cos t, B\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

4° Die Neilsche Parabel $\gamma : [-R, R] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = (t^2, t^3)$, $t \in [-1, +1]$. γ ist differenzierbar, aber die Spur hat einen „Spitze“ in $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

5° Die Schraubenlinie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, ht)$, $t \in [0,b]$.

6° Die Zykloide $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [a,b]$, beschreibt die Bewegung eines festen Punktes auf einer Kreisscheibe mit Radius 2, die auf der x-Achse abrollt.

7° Wichtige Sichtweise: Eine Kurve γ wird auch als eine *Bewegung* des Punktes $\gamma(t)$ in Abhängigkeit des Parameters t verstanden. Im Falle der Interpretation von t als Zeitparameter hat man die Ableitung (Definition kommt gleich) von γ als Geschwindigkeitsvektor $\dot\gamma(t)$. Damit lassen sich ganz allgemein dynamische Prozesse beschreiben.

Beispielsweise im Kraftgesetz von Newton: k Massenpunkte ($k \in \mathbb{N}_1$) bewegen sich im $\mathbb{R}^3$ in Abhängigkeit von der Zeit $t \in [T_0, T_1]$ als Kurve

$$x(t) = \left(x^1_{(1)}, x^2_{(1)},, x^3_{(1)}, x^1_{(2)}, x^2_{(2)},, x^3_{(2)}, \ldots x^1_{(n)}, x^2_{(n)},, x^3_{(n)}\right) \in \mathbb{R}^{3k}$$

im $\mathbb{R}^{3k}$. Die Geschwindigkeiten $v(t) = \dot x(t)$ liefern eine weitere Kurve, und die beiden Objekte fügen sich zusammen zu einer Kurve $\gamma(t) = (x(t), v(t))$ in $\mathbb{R}^{6n}$. Das Kraftgesetz von Newton besagt

$$\dot v(t) = K(t, x(t), v(t))$$

für einen geeigneten „Kraftvektor“ $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \longrightarrow \mathbb{R}^{3n}$.

(25.3) Definition: (Differentiation) Sei $\gamma : [a,b] \to E$ eine Abbildung mit Werten in einem normierten Raum. Die *Ableitung* von γ in einem Punkte $t_0 \in [a,b]$ ist der Vektor

$$\dot\gamma(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}\,,$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Dabei bedeutet der Grenzwert $\lim_{h\to 0} G(h) = B$ in E genau, dass für alle Folgen (h_n) mit $t_0 + h_n \in [a,b]$, $h_n \neq 0$ und $h_n \to 0$ stets $G(h_n) \to B$ gilt. Äquivalent dazu:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,h \in \mathbb{R} : 0 < |h| < \delta \ \text{ und } \ t_0 + h \in [a,b] \Longrightarrow \|G(h) - B\| < \varepsilon\,.$$

Die Ableitung $\dot\gamma$ schreibt man im Falle der Existenz auch als

$$\dot\gamma = \frac{d}{dt}\gamma \ \text{ und in } t_0\ :\ \dot\gamma(t_0) = \frac{d}{dt}\gamma(t_0) = \frac{d}{dt}\gamma|_{t=t_0}\,.$$

Die Ableitung wird aus gutem Grund auch *Geschwindigkeitsvektor* oder auch *Tangentialvektor* genannt.

Im Falle $E = \mathbb{R}^n$ und $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n)$ gilt: γ ist in t_0 genau dann differenzierbar, wenn das für alle γ^j, $j = 1,2,\dots n$, gilt und es ist im positiven Falle $\dot\gamma(t_0) = (\dot\gamma^1(t_0), \dot\gamma^2(t_0), \dots, \dot\gamma^n(t_0))$.

Rechenregeln zur Ableitung: Es seien die Kurven $\gamma, \beta : [a,b] \to E$ in $t_0 \in [a,b]$ differenzierbar, es sei $\lambda : [a,b] \to \mathbb{R}$ in t_0 differenzierbar und es sei $\varphi : [a',b'] \to [a,b]$ differenzierbar in $s_0 \in [a',b']$ mit $\varphi(s_0) = t_0$. Unmittelbar wie im skalaren Fall ($\mathbb{R} = E$) lässt sich zeigen, dass $\gamma + \beta$ und $\lambda\gamma$ in t_0 differenzierbar sind sowie $\gamma \circ \varphi$ in s_0 mit den folgenden Formeln:

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}(\gamma+\beta)(t_0) & = & \dot\gamma(t_0) + \dot\beta(t_0) \\ \frac{d}{dt}(\lambda\gamma)(t_0) & = & \dot\lambda(t_0)\gamma(t_0) + \lambda(t_0)\dot\gamma(t_0) \\ \frac{d}{ds}(\gamma\circ\varphi)(s_0) & = & \frac{d}{ds}\varphi(s_0)\frac{d}{dt}\gamma(t_0) \end{array}$$

(25.4) Beispiele:

1° Die Gerade $\gamma(t) = y + t(x-y)\,,\ t \in [0,1]\,,$ hat die Ableitung $\dot\gamma(t) = x - y =: v \in E$ ($x, y \in E\,,\ x \neq y$). Mit der folgenden Parametrisierung der Spur $S = \{tx + (1-t)y \,|\, t \in [0,1]\}$ durch $\gamma(t) = x + t(y-x)\,,\ t \in [0,1]$ gilt $\dot\gamma(t) = y - x = -v$ und durch $\gamma(t) = y + t^2(x-y)\,,\ t \in [0,1]$, entsprechend $\dot\gamma(t) = 2t(x-y) = 2tv$.

Man kann auch eine Parametrisierung γ des Geradenstücks angeben, die injektiv ist und $\dot\gamma(t_0) = 0$ in einem Punkte z mitten in S erfüllt. Zum Beispiel $\gamma(t) = x + h(t)(y-x)\,,\ t \in [0,1]\,,$ mit $h(t) = 1 - 3t + 6t^2 - 4t^3$: $h(\frac12) = \frac12$, also $\gamma(\frac12) = \frac12(x+y) = z$, und $\dot h(\frac12) = 0$, also $\dot\gamma(\frac12) = 0$. Die Parametrisierung bleibt auf halbem Weg stehen, um allerdings sofort wieder fortzufahren, denn h ist auf dem Intervall $[0,1]$ streng monoton fallend.

2° Die Einheitskreislinie $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) = e^{it}\,,\ t \in [a,b]\,,$ hat die Ableitung $\dot\gamma(t) = (-\sin t, \cos t)$. Offensichtlich stehen $\gamma(t)$ und $\dot\gamma(t)$ senkrecht aufeinander und es gilt: $\|\dot\gamma(t)\|_2 = 1$. Durch $(\gamma(t), \dot\gamma(t))$ wird also für jedes t ein orientiertes (rechtshändiges) Orthonormalsystem gegeben (vgl. 26.5).

3° Für die Schraubenlinie $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, ht)\,,\ t \in [0,b]$, erhalten wir als die Ableitung $\dot\gamma(t) = (-r\sin t, r\cos t, h)$.

4° Für stetige $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist $\gamma(t) = (t, f(t))\,,\ t \in [a, b]$ eine Kurve mit dem Graphen Γ_f als Spur. Ist f differenzierbar, so ist auch γ differenzierbar und es ist $\dot\gamma(t) = (1, \dot f(t))$.

Wir kommen nun zum Begriff der **Kurvenlänge**, den wir ausführlich begründen wollen:

Die Kurvenlänge soll für die Gerade $\gamma(t) = tx - (1-t)y\,,\ t \in [0, 1]$, sicherlich $\|x - y\|$ sein. Daraus ergibt sich für einen Polygonzug γ mit den Vektoren $x_0, x_1, \ldots, x_m$ als Ecken der folgende Ansatz für die Länge des Polygonzugs

$$L\gamma = \sum_{k=1}^{m} \|x_k - x_{k-1}\|\ .$$

Solche Polygonzüge können zur Approximation von beliebigen Kurven dienen, so dass sich die Länge in einem Grenzprozess in der folgenden Weise auf Kurven $\gamma : [a, b] \to E$ überträgt, wenn Konvergenz gewährleistet ist:

Eine *Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$ ist eine endliche Teilmenge $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\} \subset [a, b]$ mit $t_0 = a \leq t_k < t_{k+1} \leq t_m = b$ für $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Eine Approximation der (noch zu definierenden) Kurvenlänge zur Zerlegung Z wird durch

$$V(\gamma, Z) := \sum_{k=1}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}\|$$

gegeben.

(25.5) Definition: (Beschränkte Variation und Kurvenlänge) Sei $\gamma : [a, b] \to E$ eine Kurve, also eine stetige Abbildung.

1° Für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ heißt

$$V_a^b(\gamma, Z) = V(\gamma, Z) := \sum_{k=1}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}\|$$

die Z-*Variation* von γ.

2° Die *totale Variation* $V_a^b(\gamma)$ von γ ist

$$V_a^b(\gamma) := \sup\{V_a^b(\gamma, Z) \,|\, V \ \text{ ist Zerlegung von } \ [a, b]\}\,.$$

Die Kurve γ ist von ***beschränkter Variation***, wenn die totale Variation beschränkt, also endlich, ist: $V_a^b(\gamma) < \infty$.

Diesen Begriff brauchen wir auch für Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist demnach von beschränkter Variation, falls es $C > 0$ so gibt, dass für alle Zerlegungen Z von $[a, b]$ die Z-Variation $V_a^b(f, Z) = \sum_{k=1}^{m} |f(t_k) - f(t_{k-1}|$ der Ungleichung $V_a^b(f, Z) \leq C$ genügt.

3° γ heißt genau dann *rektifizierbar*, wenn $V_a^b(\gamma) < \infty$ gilt, und

$$L\gamma = L_a^b\gamma := V_a^b(\gamma)$$

ist dann definitionsgemäß die Kurvenlänge von γ.

„Rektifizierbar“ und „von beschränkter Variation“ sind also synonym, für Kurven sieht man eher die Eigenschaft, eine endliche Kurvenlänge zu haben, während für Funktionen eher das Oszillationsverhalten im Vordergrund steht.

(25.6) Beispiele: 1° Das Geradenstück $\gamma(t) = tx + (1-t)y = y + t(x-y)\,,\; t \in [0,1]$. Für eine Zerlegung Z des Intervalls $[0,1]$ gilt wegen $\gamma(t) - \gamma(t') = (t-t')(x-y)$ stets

$$V(\gamma, Z) = \sum_{k=1}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1})\, \|x-y\| = \|x-y\|\ .$$

Also ist $\|x-y\|$ die Länge von γ.

2° Beschreibung einer Kurve, die nicht rektifizierbar ist: Auf dem Intervall $[0,1[$ lässt sich eine stetige Funktion h definieren, die im Teilintervall $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ zunächst mit der Steigung 2 bis zur Höhe 1 ansteigt und dann mit der Steigung -2 auf 0 abfällt, die dann mit doppelter Steigung wieder bis 1 ansteigt und analog abfällt etc. mit immer steileren unendliche vielen Zacken. Für eine geeignete stetige Funktion $\lambda : [0,1] \to [0,1]$ erhält man denn eine stetige ebene Kurve $\gamma(t) = (t, \lambda(t)h(t))$, die keine beschränkte Variation hat. 22.05.2007

3° Ähnlich die Kurve $\gamma : [-1,0] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, t\cos\frac{\pi}{t})$ für $t \in [-1,0[$, und $\gamma(0) = (0,0)$. Für die Zerlegungen $Z_n = \{-1, -\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{1}{n}, 0\}$ ist $V_{-1}^{0}(\gamma, Z_n) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, daher hat γ und auch $t\cos\frac{\pi}{t}$ keine beschränkte Variation.

4° Für die Kreislinie, parametrisiert durch die Kurve $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)\,,\; t \in [0,b]$, für $b > 0$, wissen wir aus §7, dass $L_0^b\gamma \leq b$ gilt. Die Gleichheit folgt aus einer sehr effizienten Formel (in 25.12) für die Kurvenlänge von allgemeinen differenzierbaren Kurven, die wir im Folgenden herleiten wollen.

(25.7) Eigenschaften der Variation: $\gamma : [a,b] \to E$ sei eine Kurve.

1° Für Zerlegungen Z, Z^* von $[a,b]$ mit $Z \subset Z^*$ (Z^* heißt dann eine *Verfeinerung* von Z) gilt

$$V_a^b(\gamma, Z) \leq V_a^b(\gamma, Z^*)\,,$$

wie unmittelbar aus der Dreiecksungleichung folgt.

2° Für $a < c < b$ und Zerlegungnen Z' von $[a,c]$ und Z'' von $[c,b]$ gilt mit $Z = Z' \cup Z''$ direkt:

$$V_a^b(\gamma, Z) = V_a^c(\gamma, Z') + V_c^b(\gamma, Z'')\,.$$

3° Für $a < c < b$ folgt:

$$V_a^b\gamma = V_a^c\gamma|_{[a,c]} + V_c^b\gamma|_{[c,b]}\,.$$

4° Es sei $F : E \to E$ eine lineare Isometrie, das heißt F ist linear und erfüllt $\|F(v)\| = \|v\|$ für alle $v \in E$. Dann gilt $L(F \circ \gamma) = L\gamma$ und dasselbe ist richtig für Translationen $T : E \to E\,,\; v \mapsto v + b$, um einen festen Vektor $b \in E$. Also gilt für Abbildungen $A = F + T : E \to E$ stets $L\gamma = L(A \circ \gamma)$. Die Menge aller Transformationen der Form $A + T$, mit A eine surjektive Isometrie und T eine Translation, ist eine Gruppe bezüglich der Komposition, die auch die *Gruppe der Bewegungen* genannt wird.

5° Für eine stetige und bijektive Abbildung $\varphi : [a', b'] \to [a,b]$ ist $\gamma' := \gamma \circ \varphi$ Kurve mit derselben Spur wie γ (φ heißt *Parameterwechsel*). Es ist $L\gamma = L(\gamma \circ \varphi)$, weil φ die Zerlegungen Z'

von $[a', b']$ in eineindeutiger Weise den Zerlegungen $Z = \varphi(Z')$ von $[a, b]$ zuordnet. Insbesondere gilt: γ ist genau dann rektifizierber, wenn das für γ' zutrifft.

(25.8) Satz: *Jede lipschitzstetige Kurve ist rektifizierbar.*

(25.9) Lemma: *Im Falle $E = \mathbb{R}^n$ gilt für eine Kurve $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$: γ ist genau dann rektifizierbar, wenn alle γ_k , $k = 1, 2, \ldots, n$, von beschränkter Variation sind.*

(25.10) Satz: *Jede stetig differenzierbare Kurve ist lipschitzstetig und daher rektifizierbar.*

Vektorwertige Integration:

Neben der vektorwertigen Differentiation (vgl. 25.3) benötigen wir auch die vektorwertige Integration, die wir im übernächsten Paragraphen (§27) und danach eingehender studieren. In diesem Paragraphen dient das Integral dazu, als Höhepunkt eine einfache und effiziente Formel für die Kurvenlänge einer stetig differenzierbaren Kurve zu erhalten.

Hier wollen wir nur feststellen, dass zu jeder stetigen Abbildung $\beta : [a, b] \to E$ in einen Banachraum E das *Integral*

$$\int_a^b \beta(t)\, dt := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \beta(t_k)(t_k - t_{k-1})$$

als Grenzwert existiert, wobei $t_k = a + k2^{-n}(b-a)$, also $t_k - t_{k-1} = 2^{-n}$ ($Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_{2^n}\}$ ist eine äquidistante Zerlegung von $[a, b]$ der Feinheit $^{-n}$). Die Konvergenz der Folge von Summen folgt wie im Falle von $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von β.

Im Falle von $E = \mathbb{R}^n$ und $\beta = (\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^n)$ ist

$$\int_a^b \beta(t)\, dt = (\int_a^b \beta^1(t)\, dt, \int_a^b \beta^2(t)\, dt, \ldots, \int_a^b \beta^n(t)\, dt)\,.$$

Wie im skalaren Fall zeigt man:

(25.11) Satz: (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) *Sei $\beta : [a, b] \to E$ stetig. Die Abbildung $t \mapsto \int_a^t \beta(s)ds$ ist differenzierbar und es gilt*

$$\frac{d}{dt}\int_a^t \beta(s)ds = \beta(s)\,.$$

Für jede differenzierbare Abbildung $\gamma : [a, b] \to E$ mit $\dot\gamma = \beta$ (γ kann dann als Stammkurve*, oder* Stammfunktion *bezeichnet werden) ist*

$$\int_a^b \beta(t)dt = \gamma(b) - \gamma(a)\,.$$

(25.12) Satz: *Sei γ eine stetig differenzierbare Kurve in E.*

1° *Dann ist*

$$L\gamma = L_a^b\gamma = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\, dt\,.$$

2° *Die Weglängenfunktion $s(t) = s_\gamma(t) := L_a^t(\gamma|_{[a,t]})$, $t \in [a, b]$, ist stetig differenzierbar mit* $\dot s(t) = \|\dot\gamma(t)\|$.

(25.13) Hilfssatz: *Für stetige* $\beta : [a,b] \to E$ *gilt*

$$\left\| \int_a^b \beta(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|\beta(t)\| \, dt \, .$$

(25.14) Beispiele:

1° Der Kreisbogen $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0,b]$ in $\mathbb{R}^2$ erfüllt $\dot\gamma(t) = (-\sin t, \cos t)$ und damit $\|\dot\gamma(t)\| = 1$ in der euklidischen Norm. Also ist

$$L\gamma = \int_0^b dt = b$$

(vgl. 25.6.4° und 7.12.4°).

Bezüglich einer anderen Norm erhält man entsprechend andere Resultate für die Länge.

2° Der Ellipsenbogen $\gamma(t) = (A\cos t, B\sin t)$, $t \in [0,b]$, für $A, B > 0$ hat in der euklidischen Norm wegen $\|\dot\gamma(t)\|^2 = A^2\sin^2 t + B^2\cos^2 t$ die Länge

$$L\gamma = \int_0^b \sqrt{A^2\sin^2 t + B^2\cos^2 t} \, dt \, .$$

Diese Integral ist nicht so einfach zu bestimmen wie das in 1°, es ist ein Beispiel zu der Klasse der elliptische Integrale.

3° Für den Zykloidenbogen $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ errechnet sich die Länge für einen vollen Umlauf folgendermaßen: $\dot\gamma(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ und $\|\dot\gamma(t)\|^2 = 2(1 - \cos t) = 4\sin^2 \frac{t}{2}$. Daher

$$L\gamma = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2} \, dt = 4\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 8 \, .$$

Zum Schluss des Paragraphen beschreiben wir eine Ausdehnung der Formel 25.12 auf stückweise stetig differenzierbare Kurven. Diese Verallgemeinerung ist wichtig für Anwendungen, weil viele Kurven durch das Zusammenfügen von endlich vielen stetig differenzierbaren Kurven entstehen.

(25.15) Definition: Eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in E ist eine Abbildung $\gamma : [a,b] \to E$ mit

1° γ ist stetig, das heißt γ ist eine Kurve, und

2° es gibt eine Zerlegung $A = \{a_0 = a, a_1, \ldots, a_m = b\}$ des Intervalls $[a,b]$. so dass für alle $k = 1, 2, \ldots, m$ die Restriktionen $\gamma | \, [a_k, a_{k-1}]$ stetig differenzierbar sind.

Ein typisches Beispiel ist ein Polygonzug mit den Ecken $x_0, x_1, \ldots, x_m \in E$, wobei $\gamma : [0,m] \to E$, $a_k = k$, $k = 0, 1, \ldots, m$ und $\gamma(k+t) = x_k + t(x_{k+1} - x_k)$, $t \in [0,1]$.

(25.16) Satz: Sei γ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in E.

1° Dann ist

$$L\gamma = L_a^b \gamma = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| \, dt \, .$$

2° Die Weglängenfunktion $s(t) = s_\gamma(t) := L_a^t(\gamma|_{[a,t]})$, $t \in [a,b]$, ist stückweise stetig differenzierbar mit $\dot s(t) = \|\dot\gamma(t)\|$, $t \in [a,b] \setminus A$.

Wir integrieren dabei stückweise stetige Funktionen, und benötigen damit eine Verallgemeinerung des Integralbegriffs, die wir erst im übernächsten Paragraphen gründlich beschreiben.

§26 Bogenlänge und Krümmung

In diesem Paragraphen konzentrieren wir uns auf die Spur einer Kurve als Punktmenge C in einem Banachraum E und wir schränken unsere Untersuchungen auf solche C ein, die eine im wesentlichen injektive Parametrisierung zulassen. Im Falle der Rektifizierbarkeit kann man einer solchen Spur ihre Länge zuordnen.

Dann betrachten wir differenzierbare und reguläre Kurven in den Spezialfällen der euklidischen Ebene $E \cong \mathbb{R}^2$ und des euklidischen Raumes $E \cong \mathbb{R}^3$.

(26.1) Definition: Ein *Jordanbogen* in E ist eine Punktmenge $C \subset E$, zu der es eine Parametrisierung $\gamma : [a, b] \to E$ mit $\gamma([a, b]) = \gamma^* = C$ so gibt, dass γ injektiv auf $[a, b[$ ist. Eine solche Parametrisierung nennen wir auch *injektive Parametrisierung*, obwohl der Fall $\gamma(a) = \gamma(b)$ eintreten kann.

Ein Jordanbogen heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt.

(26.2) Beispiele und Bemerkungen::

1° Jedes Geradenstück S von y nach x ist ein Jordanbogen vermöge der Parametrisierung $\gamma(t) = tx + (1 - t)y = y + t(x - y)\,,\ t \in [0, 1]\,.$

Die Darstellung gibt auch Sinn für ein beliebiges Intervall $[a, b]$ der Länge $b - a > 0$: Die Kurve parametrisiert dann das Geradenstück von $y + a(x - y)$ nach $y + b(x - y)$.

2° Jedes Kreisbogenstück $C = \{r(\cos t, \sin t)\ :\ t \in [0, b]\,\}$ für $0 < b \le 2\pi$ ist ein Jordanbogen, nicht geschlossen für $b < 2\pi$ und geschlossen im Falle $b = 2\pi$.

3° Für linear unabhängige $x, y \in E$ ist $C_{x,y} = \{\cos tx + \sin ty\ :\ t \in [0, 2\pi]\}$ ein geschlossener Jordanbogen mit Parametrisierung $\gamma : [0, 2\pi] \to E\,,\ t \mapsto \cos tx + \sin ty\,.$

4° Ganz allgemein „sieht ein geschlossener Jordanbogen C so aus wie $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$“, das soll heißen, dass es einen Homöomorphismus $\alpha : \mathbb{S}^1 \to C$ gibt, die metrischen Räume C (in der Relativtopologie) und $\mathbb{S}^1$ (in der Relativtoplogie) also topologisch äquivalent sind.

Denn für eine injektive Parametrisierung $\gamma : [0, 2\pi] \to E$ (d.h. γ ist stetig, $\gamma|\,[0, 2\pi[$ ist injektiv und es gilt $\gamma^* = C$) wird eine injektive stetige Abbildung

$$\alpha : \mathbb{S}^1 \to E \ \text{ mit } \ \alpha(\mathbb{S}^1) = C$$

durch $\alpha(e^{it}) = \gamma(t)\,,\ t \in [0, 2\pi]\,$, definiert. Als Abbildung nach C ist dann α bijektiv. α ist außerdem stetig in Bezug auf die Relativtopologien (auf $\mathbb{S}^1$ und C). Daher ist $\alpha : \mathbb{S}^1 \to C$ ein Homöomorphismus, denn nach 25.16 ist wegen der Stetigkeit von α für jede abgeschlossene und daher kompakte Teilmenge $A \subset \mathbb{S}^1$ die Bildmenge $\alpha(A)$ in C kompakt, also abgeschlossen. Daher ist die Umkehrabbildung α^{-1} stetig.

Bemerkung: Die letzte Argumentation gilt allgemeiner: Ist $f : X \to Y$ eine stetige und bijektive Abbildung zwischen metrischen Räumen, und ist X kompakt, so ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ stetig, f ist also bereits ein Homöomorphismus. Außerdem folgt: Y ist kompakt.

5° Für zwei injektive Parametrisierungen $\gamma_i : [a_i, b_i] \to E$ eines Jordanbogens $C \subset E$ ist der Parameterwechsel $\varphi := (\gamma_2)^{-1} \circ \gamma_1 : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ ein Homöomorphismus (Begründung analog zu 4°). Es gilt nach 25.7.5°: γ_1 ist genau dann rektifizierbar, wenn γ_2 rektifizierbar ist, und es gilt $L\gamma_1 = L\gamma_2$.

(26.3) Definition: (Bogenlänge, Regularität)

1° Ein Jordanbogen C heißt *rektifizierbar*, wenn es eine injektive und rektifizierbare Parametrisierung γ von C gibt (äquivalent dazu nach 26.2.5°: wenn alle injektiven Parametrisierungen rektifizierbar sind). $L\gamma$ ist dann die *Bogenlänge* LC von C.

2° Eine Kurve $\gamma : [a,b] \to E$ heißt *regulär*, wenn sie stetig differenzierbar ist und $\dot\gamma(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$ erfüllt. Ein Jordanbogen heißt *regulär*, wenn es eine injektive und reguläre Parametrisierung gibt.

Es sind z.B. die Gerade, die Kreislinie und die Schraubenlinie aus 25.4 sämtlich regulär, wie auch der Graph $t \mapsto (t, f(t))$, wenn f stetig differenzierbar ist.

Das Hauptergebnis von §25, der Satz 25.12, überträgt sich unmittelbar:

(26.4) Satz: *Sei γ eine reguläre Kurve.*

1° *Die Kurvenlängenfunktion $s(t) = s_\gamma(t) = L_a^t|_{[a,t]}$, $t \in [a,b]$, ist stetig differenzierbar und es ist $\dot s > 0$.*

2° *Die Umkehrfunktion $\varphi = s^{-1} : [0,L] \to [a,b]$, $L := L_a^b\gamma$, ist stetig differenzierbar und $\sigma := s \circ \varphi$ ist eine reguläre Kurve derselben Spur ($\gamma^* = \sigma^*$) mit*

$$s_\sigma(s) = s$$

für $s \in [0,L]$.

3° *Unter den Parametrisierungen von γ^* deren Geschwindigkeitsvektoren stets die Norm 1 haben, ist σ aus 2° eindeutig bis auf die Festlegung des Anfangspunktes $\sigma(0) = c_0 \in \gamma^*$ und die Durchlaufungsrichtung.*

Man spricht im Falle von $\|\dot\gamma(t)\| = 1$ von einer *Parametrisierung durch die Bogenlänge*, weil ja $L_a^t\gamma|\,[a,t] = \int_a^t dt = t - a$.

Jeder reguläre Jordanbogen C hat also nach 26.4.2° eine Parametrisierung durch die Bogenlänge mit $a = 0$. Eine solche Parametrisierung wird auch als *natürliche Parametrisierung* bezeichnet.

Ebene Kurven und Raumkurven in der euklidischen Geometrie:

Im Folgenden (Rest des Paragraphen) geht es um ebene Kurven und um Raumkurven, das heißt um Kurven in $\mathbb{R}^2$ oder in $\mathbb{R}^3$, wobei diese beiden Räume mit der natürlichen euklidischen Norm und der üblichen Orientierung versehen werden. Die Kurven sollen meist auch höhere Ableitungen besitzen, es ist durchaus üblich, von vornherein zu verlangen, dass die Kurven (d.h. die Komponenten) beliebig oft differenzierbar sind.

(26.5) Ebene Kurven: Es sei $\gamma\,[0,b] \to \mathbb{R}^2$ natürliche Parametrisierung eines Jordanbogens $C \subset \mathbb{R}^2$. γ sei außerdem noch zweimal stetig differenzierbar.

1° $v(t) := \dot\gamma(t)$ und $\dot v(t)$ stehen senkrecht aufeinander.

2° Ist $n(t)$ der zu $v(t)$ senkrechte Einheitsvektor, der $(v(t), n(t))$ zu einem positiv orientierten Orthonormalsystem macht, so gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $\kappa(t) \in \mathbb{R}$, so dass $\dot v(t) = \kappa(t) n(t)$ gilt. $\kappa(t)$ heißt die Krümmung von C in $\gamma(t)$ (als ebener Jordanbogen).

Das Orthogonalsystem

$$(v(t), n(t))$$

heißt das *begleitende Zweibein* in $\gamma(t) \in C$. Es hängt nur von der Durchlaufungsrichtung der Parametrisierung ab. Für eine entgegengesetzte Parametrisierung $\beta(t) := \gamma(a+b-t)$, $t \in [a,b]$ gilt für $c = \gamma(t_0) = \beta(t_1)$: $\dot\beta(t_1) = -\dot\gamma(t_0)$ und das zugehörige Zweibein ist $(-v(t_0), -n(t_0))$ mit

Krümmung $-\kappa(t_0)$.

Ganz allgemein beschreibt die ebene Krümmung $\kappa(t)$ einer ebenen Kurve die Abweichung der Kurve von einer geradlinigen Bewegung:

(26.6) Satz: Ist die Krümmung eines Jordanbogens identisch 0, so handelt es sich bei dem Bogen um eine Geradenstück.

Analog kann man den Kreisbogen vom Radius $r > 0$ charakterisieren.

(26.7) Satz: *Im Falle einer dreimal stetig differenzierbaren, regulären und natürlichen Parametrisierung eines Jordanbogens sind die so genannten* Frenetschen *Formeln*

$$\dot{v} = +\kappa n$$
$$\dot{n} = -\kappa v$$

erfüllt.

Zu einer vorgegebenen stetig differenzierbaren Funktion $\kappa : [0, b] \to \mathbb{R}$ hat man dann aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen das folgende Resultat: Zu vorgegeben $x_0 \in \mathbb{R}^2$ und $v_0 \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v_0\| = 1$ gibt es einen eindeutig bestimmten Jordanbogen, der bei x_0 beginnt, in Richtung v_0 verläuft und in der natürlichen Parametrisierung die Funktion κ als Krümmungsfunktion hat.

(26.8) Raumkurven: Es sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ natürliche Parametrisierung eines Jordanbogens $C \subset \mathbb{R}^3$. γ sei außerdem noch dreimal stetig differenzierbar mit nirgends verschwindender Beschleunigung $\dot{v}(t) \neq 0$ ($v(t) := \dot{\gamma}(t)$) für alle $t \in [a, b]$.

1° Mit dem Normalenvektor $n(t) := \frac{\dot{v}(t)}{\|\dot{v}(t)\|}$ und dem Binormalenvektor $b(t) := v(t) \times n(t)$ ist $(v(t), n(t), b(t))$ ein positiv orientiertes Orthonormalsystem des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$, welches das *begleitende Dreibein* genannt wird.

2° Der eindeutig bestimmte Koeffizient $\kappa(t)$ mit $\dot{v}(t) = \kappa(t)n(t)$, also $\kappa(t) = \|\dot{v}(t)\|$, ist die *Krümmung* (genauer *Raumkrümmung*) der Kurve in $\gamma(t)$.

3° Der eindeutig bestimmte Koeffizient $\tau(t)$ von $\dot{n}(t)$ in Bezug auf $b(t)$, also $\tau(t) = \langle \dot{n}(t), b(t) \rangle$ ist die *Torsion* oder die *Windung* der Kurve in $\gamma(t)$. [01.06.2007]

Es gilt:

$$\tau = \frac{1}{\kappa^2} \det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dddot{\gamma}) \,.$$

4° Die Veränderung des begleitenden Dreibeins wird durch das folgende System (die Frenetschen Formeln) beschrieben:

$$\begin{array}{rcl} \dot{v} & = & \qquad \kappa n \\ \dot{n} & = & -\kappa v \qquad\qquad \tau b \\ \dot{b} & = & \qquad -\tau n \end{array}$$

Man beachte, dass die Raumkrümmung immer nichtnegativ ist, während die Krümmung einer ebenen Kurve (je nach Durchlaufungsrichtung) auch negativ sein kann (vgl. Beispiel 26.9.1°).

Bemerkung: Die Torsion einer Kurve bzw. eines regulären Jordanbogens im Raum $\mathbb{R}^3$ gibt die Abweichung der Kurve an, in einer festen affinen Ebene zu verlaufen. Denn im Falle $\tau(t) = 0$ für alle $t \in [a, b]$ ist der Binormalenvektor b wegen $\dot{b} = 0$ konstant und die Kurve verläuft vollständig in der Ebene $\gamma(a) + b^{\perp}$ senkrecht zu b.

(26.9) Beispiele:

1° Die Kreislinie $R\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = R^2\}$ mit dem Radius $R > 0$ ist ein regulärer geschlossener Jordanbogen und hat z.B. die reguläre Parametrisierung $\gamma(t) = R(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Diese Parametrisierung ist aber keine natürliche Parametrisierung. Die Kurvenlänge $s(t) = L_0^t\gamma|\,[0,t]$ ist $s(t) = \int_0^t R\,dt = Rt$ wegen $\|\dot\gamma\| = 1$, und eine natürliche Parametrisierung ergibt sich als

$$\sigma(s) = R(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R})\,,\ s \in [0, 2\pi R]\ .$$

Als Geschwindigkeitsvektor hat man

$$v(s) = \dot\sigma(s) = (-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R})$$

und als Normalenvektor

$$n(s) = -(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R})\,,$$

der Normalenvektor zeigt also in die entgegengesetzte Richtung als der Vektor $\sigma(s)$. Wegen

$$\dot v(t) = \frac{1}{R}(-\cos\frac{s}{R}, -\sin\frac{s}{R})$$

ist die Krümmung also konstant gleich $\frac{1}{R}$: Für große Radien R wird die Krümmung also sehr klein, für kleine Radien hat man eine große Krümmung.

Mit der entgegengesetzten Durchlaufungsrichtung, also mir der Parametrisierung

$$\tau(s) = R(\cos\frac{s}{R}, -\sin\frac{s}{R})$$

erhält man

$$v(s) = -(\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R})$$

und

$$n(s) = (\cos\frac{s}{R}, -\sin\frac{s}{R})$$

sowie als Krümmung $\kappa = -\frac{1}{R}$.

2° Die Schraubenlinie $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, ht)$, $t \in [0, b]$ hat die natürliche Parametrisierung

$$\sigma(s) = (r\cos\frac{s}{N}, r\sin\frac{s}{N}, h\frac{s}{N})\,,\ s\,[0, Nb]\ ,$$

wobei $N = \sqrt{r^2 + h^2}$. Aus

$$\begin{aligned}
\dot\sigma(s) &= (-\frac{r}{N}\ \sin\frac{s}{N}, +\frac{r}{N}\cos\frac{s}{N}, \frac{h}{N}) \\
\ddot\sigma(s) &= (-\frac{r}{N^2}\cos\frac{s}{N}, -\frac{r}{N^2}\sin\frac{s}{N}, 0) \\
\dddot\sigma(s) &= (+\frac{r}{N^3}\sin\frac{s}{N}, -\frac{r}{N^3}\cos\frac{s}{N}, 0)
\end{aligned}$$

ergibt sich

$$\det(\dot\sigma, \ddot\sigma, \dddot\sigma) = \frac{r^2 h}{N^6}\ .$$

Daher haben wir als Krümmung und Torsion

$$\kappa = \frac{r}{N^2}\ ,\ \tau = \frac{h}{N^2}\ .$$