MIA – Präsenzaufgaben Nr. 8
20.12. –22.12.2006

1. Konvergenz von $\sum \frac{n^5}{5^n}$?

2. Konvergenz von $\sum \frac{n+1}{n^2-3n+1}$?

3. Konvergenz von $\sum \frac{5^n n!}{n^n}$?

4. Konvergenz von $\sum h_n 2^{-n}$, $h_n = \sum_1^n \frac{1}{k}$?

5. Sei $\sum a_n$ eine konvergente Reihe und (b_n) eine beschränkte Folge.

   1° Man zeige, unter der Annahme, dass die Reihe absolut konvergiert, dass auch die ''Produktreihe“ $\sum b_n a_n$ konvergiert.

   2° Man gebe ein Beispiel, bei dem $\sum b_n a_n$ nicht konvergiert.

   3° Kann man auch ein Beispiel einer divergenten Reihe $\sum b_n a_n$ finden, bei der die Folge (b_n) eine Nullfolge ist?

6. Beweise oder widerlege für eine Reihe $\sum a_n$:

   $\sum a_n$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $r > 0$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}_n$ gibt, so dass für alle $k, l \in \mathbb{N}_{n_0}$ mit $k \leq l$ stets $\left|\sum_{j=k}^{l} a_l\right| < r$ gilt.

   Analog mit: $\forall\, r > 0\, \exists\, n \in \mathbb{N}\, \forall\, k \in \mathbb{N} : \left|\sum_{j=n}^{n+k} a_j\right| < r$

7. Die Potenzreihe $\sum a_n T^n$ habe den Konvergenzradius $\rho\,,\ 0 < \rho < \infty$. Man bestimme - soweit möglich - die Potenzreihe $\sum a_n^{-1} T^n$ auf ihren Konvergenzradius. Hilft es, mit der zusätzliche Annahme zu arbeiten, dass $(\sqrt[n]{|a|_n})$ konvergiert? Ist das sowieso immer erfüllt?