MIA – Präsenzaufgaben Nr. 7
5.12. – 8.12.2006

Bitte Aufgabe 1 b) behandeln!

1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Für die Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^n a_n$$

der zugehörigen alternierenden Reihe gilt:

a) (s_{2n}) ist monoton fallend, (s_{2n+1}) ist monoton wachsend (in der Vorlesung gezeigt.)

b) Die beiden Folgen sind beschränkt: $s_{2n+1} \leq s_0$, $s_{2n} \geq s_1$. (nicht in der Vorlesung gezeigt.)

2. Man beweise oder widerlege für beschränkte Folgen $(a_n), (b_n)$:

a) $-\limsup a_n = \liminf(-a_n)$

b) $\limsup(a_n + b_n) = \limsup a_n + \limsup b_n$

c) $\limsup a_n b_n = \limsup a_n \limsup b_n$

3. Für positive a_n entscheide man die Gültigkeit von:

a) $\limsup a_n = \infty \iff \liminf \frac{1}{a_n} = 0$

b) $\liminf a_n = \infty \iff \limsup \frac{1}{a_n} = 0$

4. Sei $a_n > 0$ und $0 < \limsup a_n < \infty$, $0 < \liminf a_n < \infty$. Dann:

a) $\limsup \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\liminf a_n}$

b) $\liminf \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\limsup a_n}$

Geben die Identitäten auch Sinn, wenn die Limites 0 oder ∞ sein sollten?

5. Zu jedem $x \in]0, 1[$ gibt es eine Folge natürlicher Zahlen (n_k) mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = x\,,$$

oder ?

6. Prüfe auf Konvergenz:

a) $\sum \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n}$

b) $\sum \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}$

c) $\sum \frac{n!}{n^n}$