MIA – Präsenzaufgaben Nr. 5
22.11 – 24.11.2006

1. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0, b > 0$ zeige man
$$\frac{a}{\sqrt{a}} + \frac{b}{\sqrt{b}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ sowie } \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}\,,$$
oder muss es $\leq$ heißen?

2. Sei $a > 0$. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $a^n < x < a^m$.

3. Seien $n, m \in \mathbb{N}_1$. Dann ist $\sqrt[n]{m}$ entweder eine natürliche Zahl oder eine irrationale Zahl, dh. in $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

4. Sei $g \in \mathbb{N}_2$ eine feste Zahl. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ stets
$$z_{n+1} := [\, g^{n+1} x] - g[\, g^n x] \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 \leq z_n < g\,.$$
Hilfe dazu: Man diskutiere und beweise gegebenenfalls für $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$:
$a - [\, a] < 1$; $[\, a - m] = [\, a] - m$
(In der g-adischen Entwicklung, z.B. der Dezimalbruchentwicklung im Fall $g = 10$, ist z_n die n-te Ziffer nach dem Komma, mehr dazu in der Vorlesung.)

5. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0$$

6. Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ eine reelle Zahlenfolge. Zu welchen der folgenden Aussagen ist „$(B_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ konvergiert gegen $B \in \mathbb{R}$“ äquivalent / nicht äquivalent?
   - $\forall\, a \in \mathbb{R} \exists\, b \in \mathbb{R} \forall \varepsilon \in \mathbb{N} : 0 < a \Longrightarrow (b < \varepsilon \Longrightarrow |B - B_\varepsilon| < \frac{1}{a}\,)\,.$
   - $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R} \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \exists\, n \in \mathbb{N}_{n_0} : 0 < \varepsilon \Longrightarrow |B - B_n| < \varepsilon\,.$
   - $\forall\, k \in \mathbb{N}_m : (B_j)_{j\in\mathbb{N}_k}$ konvergiert gegen B.
   - Für alle $\varepsilon > 0$ gilt für $A := \{B_n \mid n \in \mathbb{N}_m\}$: $A \backslash [\, B - \varepsilon, B + \varepsilon]$ ist endlich.
   - $\forall \epsilon \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}_m \exists k \in \mathbb{N}_n : 0 < \epsilon \Longrightarrow |B - B_k| < \epsilon\,.$
   - $\forall\, z \neq 0 \exists\, N \in \mathbb{N} \forall\, k \in \mathbb{N}_N : |B_k - B| < |z|$.
   - $\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, n_1 \in \mathbb{N} \,\exists\, \lambda \in \mathbb{Q} \,\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0} : |B_n - B| < \varepsilon\,.$

7. $a_n \longrightarrow a\,,\, b_n \longrightarrow a\,,\, a_n \leq c_n \leq b_n \quad \Longrightarrow \quad c_n \longrightarrow a\,.$