

MIA – Präsenzübungen 15.11 – 17.11.2006

Gegebenenfalls können noch Aufgaben aus den letzten Vorschlägen zu Präsenzaufgaben bearbeitet werden.

1. K sei ein angeordneter Körper. Welche der folgenden Regeln für beliebige $a, b, c \in K$ sind richtig:

- $\sup\{c - a, a - c\} < b \Leftrightarrow a - 2b < c$
- $ab > 1 \Rightarrow 1 < b$
- $ab > 1 \wedge a < 1 \Rightarrow 1 < b$
- $a(a - 2c^2) > 0 \Leftrightarrow a - c^2 > c^2$ oder $c^2 - a > c^2$

2. In einem Körper K sei $\mathbb{N}_K = \{n1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathbb{Z}_K = \{a \in K \mid a \in \mathbb{N}_K \text{ oder } -a \in \mathbb{N}_K\}$

- Man zeige, dass \mathbb{Z}_K die Regel A.4 erfüllt.
- Man zeige, dass die Abbildung $\psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_K, z \mapsto z1$ die Addition und die Multiplikation respektiert: $\psi(z + z') = \psi(z) + \psi(z')$, $\psi(zz') = \psi(z)\psi(z')$
- Gilt $\psi(z) \neq 0$ für $z \neq 0$?
- Ist ψ injektiv oder surjektiv?
- Lässt sich ψ fortsetzen zu einem Homomorphismus von Körpern $\Psi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_K$?

3. Für jede reelle Zahl $r > 0$ ist $r + \frac{1}{r} > 2$