MIA – Präsenzaufgaben Nr. 10
17.1. –19.1.2007

1. Zeige $(n+1)^n < n!e^n < (n+1)^{n+1}$ und folgere
$$\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

2. Sei $A \subset \mathbb{R}$. Dann definiert $d_A(x) := \inf\{|x-a| \,:\, a \in A\}$ eine stetige Funktion. Ist d_A lipschitzstetig?

3. Man zeige für eine stetige Funktion f auf $[a, a+2\omega]$, $\omega > 0$, mit $f(a) = f(a+2\omega)$: Es gibt $\xi \in [a, \omega]$ mit $f(\xi) = f(\xi + \omega)$.

4. Man zeige: $f : D \to \mathbb{R}$ sei gleichmäßig stetig und D sei beschränkt. Dann ist f beschränkt. Gilt auch die Umkehrung?

5. Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ auf dem kompakten Intervall stetig mit $f(a)f(b)+g(a)g(b)) < f(a)g(b) + f(b)g(a)$. Zeige: Die Graphen von f und g schneiden sich, d.h. es gibt $\xi \in I$ mit $f(\xi) = g(\xi)$.

6. Beweise: Die Gleichung $z^n = 1$ hat genau die Lösungen
$$\zeta_k := e^{\frac{2\pi k}{n}}\,,\ k = 1, 2, \ldots, n\,.$$
Das sind die n-ten Einheitswurzeln.

7. Ist $g(x) := |x|\, x^2$ in 0 differenzierbar?

8. $f(x) := \sqrt[k]{x}\,,\ x \geq 0$ ist differenzierbar!?

9. Berechne die Ableitung von $x \to \sqrt{x\sqrt{x}}$.