I. Aufgabenstellung

a) Es seien $\alpha \in R \backslash N$ und f: $]-1,\infty[\to R$ die Funktion $f(x)=(1+x)^{\alpha}$
Bestimmen sie die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt 0 und das Restglied.
b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe und das Konvergenzverhalten in den Randpunkten.
c) Untersuchen Sie, in welchen Punkten, in denen die Taylorreihe konvergiert, das Restglied gegen 0 strebt.
d) In welchen Punkten konvergiert die Taylorreihe gegen die Funktion f?
e) Wie lautet für $n \in N$ die Taylorreihe von $f: R \to R$, $f(x)=(1+x)^{n}$ im Entwicklungspunkt 0 und in welchen Punkten konvergiert sie und stellt die Funktion f dar?

II. Beweisidee

- Zunächst einmal gilt es, die Reihenentwicklung im Punkte 0 und das Restglied zu finden.

Außerdem kann es bei Taylorreihen vorkommen, dass sie an gewissen Stellen divergieren oder an eben diesen Stellen gegen einen anderen Wert als den Funktionswert streben. Deshalb soll anschließend die Konvergenz untersucht werden bzw. in welchen Punkten sie gegen die Funktion f konvergiert.
Des Weiteren soll der Spezialfall mit $n \in N$ für f: $R \to R$, $f(x)=(1+x)^{n}$ untersucht werden.

- Um diese Aufgabe ordentlich bearbeiten zu können, muss man eine Taylorentwicklung

durchführen können, und bei der Überprüfung der Konvergenzeigenschaften bzw. Bestimmung des Konvergenzradius, ist es empfehlenswert, Reihen und Folgen aus der Vorlesung (deren Konvergenzeigenschaften man schon kennt) zum Vergleich heranzuziehen. Darüber hinaus sollte man die in der Vorlesung besprochenen Konvergenzkriterien im Kopf haben.
(In den Aufgaben a)- e) ist stets zu beachten, dass $\alpha \in R \backslash N$, denn für $\alpha \in N$ bricht die Reihe ab, was in e) der Fall ist.)

- **Def.:** Für eine n- mal differenzierbare Funktion $f(x)$ gilt für die Taylorreihe im

Entwicklungspunkt $\alpha \in D_f$ folgendes:

$$T[f,a](x)=\sum_{k=o}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Und für das Restglied in Integral-Darstellung gilt:

$$R_{n+1}=\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}dt$$

III. Lösung

a) Berechnung der Taylorreihe von $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ im Entwicklungspunkt 0:

Für die Ableitungen erhalten wir:

$f(0)=1$

$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$ $\qquad f'(0)=\alpha$

$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ $\qquad f''(0)=\alpha(\alpha-1)$

.
.
.

Bei der Entwicklung von Taylorreihen muss man die Regelmäßigkeiten der Ableitungen der Funktion f untersuchen um dann auf eine allgemeine Formel für die k-te Ableitung der Funktion f zu kommen, was in diesem Fall ziemlich offensichtlich ist. (Mit vollständiger Induktion kann die Formel dann sehr einfach bewiesen werden.)

Für die k-te Ableitung erhalten wir also
$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}=k!\binom{\alpha}{n}(1+x)^{\alpha-K}$.
Nun Setzen wir den Entwicklungspunkt in die k-te Ableitung ein und erhalten
$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)=\binom{\alpha}{n}k!$

Da also $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\binom{\alpha}{n}$, lautet die Taylorreihe von f

$$T[f,0](x)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

und das Restglied

$$R_{n+1}(x)=(n+1)\binom{\alpha}{n+1}\int_0^x(x-t)^n(1+t)^{\alpha-n-1}dt$$

Erläuterung des Restgliedes:
Wenn mittels der Taylorreihe Funktionswerte berechnet werden, so verwendet man nur n-Glieder. Also entsteht ein Fehler $R_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^n f^{(n+1)}dt$ (Restglied), der möglichst genau abgeschätzt werden muss.

b) Berechnung des **Konvergenzradius** mittels dem Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n}x^n}\right|=\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right||x|\to|x|$$

In dieser Rechnung wurde verwendet, dass $\binom{\alpha}{n+1}:=\frac{\alpha-n}{n+1}\binom{\alpha}{n}$ (s.1.12 Vorlesung)

Nach dem Quotientenkriterium ist diese Reihe für $|x|<1$ konvergent, sonst divergiert sie.

$\Rightarrow$ Konvergenzradius 1

Konvergenzeigenschaften an den Rändern:

1. Fall: $x=-1$, also müssen wir die Reihe $\sum a_n \equiv \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}$ untersuchen.

Für $\alpha > 0$ und alle hinreichend große n gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}}{(-1)^n\binom{\alpha}{n}x^n}\right| = \left|-1+\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = \left|1-\frac{\alpha-n}{n+1}\right| \leq 1-\frac{\beta}{2} \text{ mit } \beta := \frac{\alpha}{2}+1>1$$ (Raabsche Kriterium)

Für $\alpha < 0$ liegt nach dem Leibnitzkriterium offensichtlich Divergenz vor, denn für $\alpha < 0$ ist die Folge $a_n = \binom{\alpha}{n}$ keine monoton fallende nicht- negativer Zahlen mit $\lim a_n = 0$ für ($n \to \infty$).

2. Fall: x =1, also betrachten wir die Reihe $\sum b_n \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}$

Für $\alpha \leq -1$ ist $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \leq -1$, somit ist $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \geq 1$ und das Quotientenkriterium sagt uns die Divergenz.

Für $\alpha > -1$:

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}}\right| = \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = \left|\frac{\alpha-n+1-1}{n+1}\right| = \left|\frac{-n-1}{n+1}+\frac{\alpha+1}{n+1}\right| = \left|\frac{\alpha+1}{n+1}-1\right| < 1, \text{ sofern } \alpha > -1.$$

Alternativ könnte man diesen Fall auch folgendermaßen begründen:

Wegen $\dfrac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}} = \dfrac{\alpha+1}{n+1}-1$, *ist für jedes hinreichend große* n *jedes* $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ *negativ, d.h., es handelt sich hiermit um eine alternierende Reihe.*

Da $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| < 1$ *für hinreichend großes n, etwa* $n \geq m$*, kann man daraus schließen, dass die Folge* $(|b_m|, |b_{m+1}|, |b_{m+2}| \ldots)$ *abnimmt.*

Da zudem $b_n = \binom{\alpha}{n}$ *gegen Null konvergiert, kann das Leibnitzkriterium angewendet werden.*

c) Wir wissen bereits, in welchen Punkten die Taylorreihe konvergiert, nämlich für $|x| < 1$, also müssen wir das Restglied nur in diesen Punkten zu untersuchen, um zu sehen, ob es in diesen Punkten tatsächlich gegen null konvergiert.
Betrachten wir nun die Restglieddarstellung in der Integral-Darstellung.

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)} dt = (n+1)\binom{\alpha}{n+1}\int_0^x (x-t)^n (1+t)^{\alpha-n-1} dt$$

Das Integral auszurechnen ist viel zu kompliziert, deshalb muss man sich einen einfacheren Weg suchen, der folgendermaßen aussehen könnte: (Wem der folgender Beweis nicht einleuchtet, sollte den Mittelwertsatz der Integralrechnung nachlesen)

1. Fall: $0 \le x < 1$
sei nun $\mathrm{M} := \max(1, (1+x)^\alpha)$ oder eine obere Schranke. Dann gilt für $0 \le t \le x$
$0 \le (1+t)^{\alpha-n-1} \le (1+t)^\alpha \le \mathrm{M}$

$$\Rightarrow |R_{n+x}(x)| = (n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right| \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{\alpha-n-1} dt \le (n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right| \mathrm{M}\int_0^x (x-t)^n dt$$
$$= \mathrm{M}\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|(n+1)\left[\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1}(-1)\right]_0^x = \mathrm{M}\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|(n+1)\frac{1}{n+1}x^{n+1}$$
$$= \mathrm{M}\left|\binom{\alpha}{n+1}\right| x^{n+1}$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $x^n \to 0$ konvergiert, genau dann wenn $|x| < 1$.
Außerdem wissen wir aus Teil b), dass $\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|$ nicht beliebig groß werden kann.
Also konvergiert das Restglied für $0 \le x < 1$ gegen null.

2. Fall: $-1 < x < 0$

$$|R_{n+x}(x)| = \left|(n+1)\binom{\alpha}{n+1}\int_0^{|x|} (x+t)^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt\right| = (n+1)\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| \int_0^{|x|} (|x|-t)^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt$$

Das Problem hierbei ist, dass man nicht mehr so einfach mit M abschätzen kann, wie im ersten Fall. Aber zur Vereinfachung des Integrals, könnte man z.B. mit folgendem Term $|x|^n (1-t)^n$ eine Ungleichung konstruieren.

Dann erhalten wir:

$$R_{n+1}(x) \le (n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right| \int_0^{|x|} |x|^n (1-t)^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt = (n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right| |x| \int_0^{|x|} (1-t)^{\alpha-1} dt = (n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right| |x|^n \left[\frac{1}{\alpha}(1-t)^\alpha(-1)\right]_0^{|x|}$$

$$= (n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right||x|^n\left[\frac{1}{\alpha}(1-|x|)^\alpha(-1)-\frac{1}{\alpha}(-1)\right] = (n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right||x|^n\frac{1}{\alpha}\left((1-|x|)^n-1\right)$$

$$= \left|\alpha\binom{\alpha-1}{n}\right||x|^n\frac{1}{\alpha}\left((1-|x|)^n-1\right) = \mathrm{A}\binom{\alpha-1}{n}|x|^n \qquad \text{mit } \mathrm{A} := (1-x)^n-1$$

In diesem Fall darf die Variable A Eingeführt werden, da A für $|x|<1$ nicht unendlich groß werden kann, so konvergiert $|x|^n$ für $|x|<1$ gegen null; also geht alles gegen null (wegen Produkt).
Die Summe der beiden Fälle sagt uns nun die Konvergenz des Restglieds für $|x|<1$ gegen null.

d) Die Taylorreihe konvergiert gegen die Funktion f, genau dann wenn das Restglied gegen null geht, wobei x im Konvergenzintervall liegen soll.
Dass das Restglied für $|x|<1$ gegen null konvergiert wurde bereits in der Aufgabe c) gezeigt.
Also bleibt noch zu prüfen, ob die Reihe auch in den Punkten $x=-1$ und $x=1$ gegen die Funktion konvergiert.
In diesem Fall kann bei der Überprüfung der Konvergenzeigenschaften wegen $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ entweder das Restglied untersucht werden, so wie es in der Aufgabe c) gefordert war, oder eben überprüft werden, ob die Differenz $f(x)-P_n(x)=0$ wird.

Aus Aufgabe c) wissen wir, dass $f(x)-P_n(x)=0$ für $|x|<1$.
Aus b) wissen wir, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ für **x=** -1 **und x= 1** konvergiert, **sofern** $\alpha > 0$.
Ist diese Reihe zudem auf dem Intervall $[-1,1[$ stetig, dann gilt:

$$\lim \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n = \lim\,(1+x)^\alpha = 0 \qquad (\text{für } x \to -1, \text{ von rechts}).$$

Das heißt also, dass für $x=-1$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ gegen die Funktion konvergiert, sofern $\alpha > 0$.
(Da die Vorraussetzungen für den Grenzwertsatz von Abel erfüllt sind, dürfen wir die Stetigkeit annehmen)

Alternativ *könnte man diesen Fall auch folgendermaßen untersuchen:*

Sei $S := \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *mit* a_n *monoton fallend gegen null (* $a_n = \binom{\alpha}{n} \to 0, sofern\, \alpha > 0$ *),*

$$\left|s-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\right| \le ?$$

$$\left|-a_{n+1}+a_{n+2}-a_{n+3}+a_{n+4}-\ldots\right| = \left|a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+3}-a_{n+4}+\ldots\right| = a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+3}-a_{n+4}+\ldots$$

Im letzten Schritt konnten die Beträge weggelassen werden, da $a_{n+1}-a_{n+2}>0$ *,* $a_{n+3}-a_{n+4}>0$*... (wegen Monotonie).*

Des Weiteren gilt: $a_{n+1} - \underbrace{a_{n+2} + a_{n+3}}_{\leq 0} \ldots$

$$\Rightarrow \left| (1+x)^{\alpha} - \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k \right| \leq a_{n+1} = \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}$$

Und wegen Stetigkeit:

Für $x \to -1: \left| 0^{\alpha} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \right| \leq \binom{\alpha}{n+1}$

Formatiert

$\Rightarrow$ *für* $n \to \infty$ *konvergiert die Reihe gegen die Funktion.*

Falls $\alpha > -1$, so handelt es sich bei $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}$ um eine alternierende Reihe, wie in Aufgabe b)

und es gilt für die Folge: $\binom{\alpha}{n} = (-1)^n \left| \binom{\alpha}{n} \right|$.

Für x $\to 1$: $\lim \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} = \lim\ (1+x)^{\alpha} = 2^{\alpha}$

Zusammenfassend kann nun folgende Aussage gemacht werden:

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \text{ wenn}$$

i) $|x| < 1$,

ii) x $= -1$ und $\alpha > 0$ (gilt vielleicht nicht wirklich, da f: $]-1,\infty[\ \to R$?), oder

iii) x $=1$ und $\alpha > -1$

e) Für den Fall $f(x) = (1+x)^n$ mit n aus N, lässt sich die Taylorreihe wie in a) entwickeln.
Also lautet die Taylorreihe von f

$$T[f,0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$$

Der Unterschied zum ersten Fall liegt darin, dass diese Reihe abbricht, sobald $k > n$ für n aus N

Gelöscht:

, weil $\binom{n}{k} = 0$ für k > n.

In diesem Fall handelt es sich um ein Polynom von Grad n,

$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+...+\binom{n}{n}x^n$ und dieses Polynom konvergiert genau dann

wenn $|x|<1$ (Quotientenkriterium wie in b).

Aber für den Fall k > n: $P(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=0.$

$$\Rightarrow \lim 1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+...+\binom{n}{n}x^n=0 \qquad \text{für } (n\to\infty)$$

Es gilt: $P(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+...+\binom{n}{n}x^n$ und $f^{(n+a)}(x)=0$, für alle $a\geq 1$. Das heißt, dass die Ableitungen der Ordnung größer n verschwinden.

$$\Rightarrow R_{n+1}(x)=(n+1)\binom{\alpha}{n+1}\int_0^x (x-t)^n 0dt=0\,.$$

Dass die Reihe die Funktion für $|x|<1$darstellt, ist nach c) klar.

Also stellt diese Reihe die Funktion f für alle x aus dem Konvergenzintervall dar.

IV. Variationen, Verallgemeinerungen, Abschwächungen

In Teilaufgabe a) kann das Restglied in mehreren Varianten aufgeschrieben werden, z.B. in der lagrangeschen Form, allerdings kommt man in dieser Aufgabe mit der lagrangeschen Form nicht besonders weit. Bei der Bestimmung des Konvergenzradius könnte man auch mit der Cauchy- Hadamard- Formel operieren, was eigentlich besser wäre, denn diese funktioniert immer.

V. Nutzen und Anwendung

Die Taylorreihen sind ein gutes Werkzeug in der Analysis, denn mittels Taylorreihen können Funktionen in bestimmten Punkten durch Potenzreihen dargestellt werden. So kann in vielen Fällen eine komplizierte Funktion durch eine Taylorreihe angenähert werden. Vor allem in der Physik sind Taylorreihen von großem Nutzen.

Marta-Marie Beisiegel, München 23.03.07