Musterlösung zu Blatt 14, Aufgabe 10

I Aufgabenstellung

a) Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ sei $(n+1)$-mal stetig differenzierbar für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie die *Taylorformel mit Integralrestglied*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt, \qquad x \in I.$$

Hinweis: Induktion nach n und partielle Integration im Induktionsschritt.

b) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion mit $f^{(n)}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f ein Polynom vom Grad $< n$ ist.

II Beweisidee

„Worum geht's?“: Beide Aufgabenteile verbinden das erste Thema der Vorlesung mit dem letzten: vollständige Induktion mit Differential- und Integralrechnung. Im a) wird mithilfe dieser Methoden mit der „Taylorformel mit Integralrestglied“ sogar ein sehr nützliches numerisches Verfahren bewiesen (siehe unter V.).
Die Aufgabe ist dabei sehr klar formuliert und auch zum Ansatz werden schon Angaben gemacht.

„Wie mach' ich das?“: Am besten, ich halte mich also an diese Vorgaben.
Was war nochmal vollständige Induktion? Ein Beweisverfahren mit fester und relativ einprägsamer Struktur: Im *Induktionsanfang (I.A.)* wird die zu beweisende Aussage stets für ein erstes Element (meist den kleinstmöglichen Wert eine natürlichen Variablen, also 0 oder 1) bewiesen, woraus die *Induktionsvoraussetzung (I.V.)* folgt, nämlich die Annahme, dass die Aussage für alle Elemente unterhalb eines bestimmten (für alle natürlichen Werte der Variablen bis zu einem bestimmten) richtig ist. Die Induktion ist dann (und nur dann) gelungen, wenn nach geglücktem Induktionsanfang unter Annahme der Induktionsvoraussetzung der *Induktionsschritt (oder -schluss; I.S.)* gelingt, also der Beweis, dass die Aussage auch für das nächste Element (die nächste natürliche Zahl als Wert der Variablen) richtig ist.
In a) wird zudem der Begriff „partielle Integration“ verwendet, auch als „Produktregel“ der Integration bekannt. Er beruht nämlich genau auf der Anwendung dieser Regel und kann so leicht hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}
& (u(x) \cdot v(x))' = u(x)' \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\
\Rightarrow\ & u(x) \cdot v(x) = \int u(x)' \cdot v(x)dx + \int u(x) \cdot v'(x)dx \\
\Rightarrow\ & \int u(x)' \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx \\
& \text{oder mit Grenzen } a \text{ und } b\text{:} \\
\Rightarrow\ & \int_a^b u(x)'v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.
\end{aligned}$$

In b) werden neben der Idee eine Induktion zu verwenden lediglich grundlegende Kenntnisse der Integration (von Funktionen) vorausgesetzt, so ist bekannt, dass

$$(x^n)' = nx^{(n-1)} \Rightarrow \int x^{n-1}dx = \frac{x^n}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_1.$$

„Wie komm' ich drauf?“: In diesem Fall ist ein Großteil der Lösung, die Aufgabe sorgfältig zu lesen und die Hinweise zu beachten.
Bei den Umformungen, die sich dann ergeben, ist es wichtig die Übersicht zu wahren, oft hilft es, wie unten vorgeführt, bei komplexen zusammengesetzten Termen einzelne Bestandteile auszugliedern und zunächst separat umzuformen. Berühmt-berüchtigte Fehlerquellen sind dabei Vorzeichenfehler (besonders mit Klammern) oder falsche Indizes.

III Lösung

a) Vollständige Induktion nach n
Es werde mit T_n der erste Summand der Formel bezeichnet, er gibt die Taylorentwicklung der Funktion f zu jedem n an. Mit R_n werde das zugehörige Integralrestglied, der zweite Summand der Summe, bezeichnet:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}_{T_n} \quad + \quad \underbrace{\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt}_{R_n}$$

Induktionsanfang $n = 0$: Ausrechnen ergibt:

$$\begin{aligned}
& T_0 + R_0 \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \\
= \ & \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{1}{0!}\int_{x_0}^{x} f^{(0+1)}(t)(x-t)^0 dt \\
= \ & \frac{1}{0!} f^{(0)}(x_0)(x-x_0)^0 + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt \\
= \ & f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x_0) + [f(t)]_{x_o}^{x} \\
= \ & f(x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x).
\end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung (I.V.): Für n gelte:

$$T_n + R_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^d t = f(x)$$

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
(1) \qquad & T_{n+1} + R_{n+1} \\
= \ & \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{((n+1)+1)}(t)(x-t)^{(n+1)} dt ...
\end{aligned}$$

Aus der Summe in T_{n+1} wird das letzte Glied abgespalten:

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{(n+1)} \\ &= T_n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{(n+1)}, \end{aligned}$$

auf das Integral in R_{n+1} die partielle Integration („Produktregel") angewendet:

$$\begin{aligned} R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x} &\underbrace{f^{((n+1)+1)}(t)}_{=:u'(t)} \cdot \underbrace{(x-t)^{(n+1)}}_{=:v(t)} dt \\ = \quad & \frac{1}{(n+1)!} \left([u(t) \cdot v(t)]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} u(t) \cdot v'(t) dt \right) \\ \text{mit:} \quad & u(t) = f^{(n+1)}(t) \text{ und } v'(t) = (n+1)(x-t)^n(-1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x} f^{((n+1)+1)}(t)(x-t)^{(n+1)} dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(\left[f^{(n+1)}(t)(x-t)^{(n+1)} \right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} (n+1) f^{(n+1)}(t)(x-t)^{(n)}(-1) dt \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(\left[f^{(n+1)}(t)(x-t)^{(n+1)} \right]_{x_0}^{x} + (n+1) \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{(n)} dt \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left[f^{(n+1)}(t)(x-t)^{(n+1)} \right]_{x_0}^{x} + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{(n)} dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(f^{(n+1)}(x)(x-x)^{(n+1)} - f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{(n+1)} \right) + R_n \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{(n+1)} + R_n. \end{aligned}$$

In (1) kann jetzt wieder eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} (1) \qquad & T_{n+1} + R_{n+1} \\ = \; & T_n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{(n+1)} - \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{(n+1)} + R_n \\ = \; & T_n + R_n =^{(I.V.)} f(x). \end{aligned}$$

quod erat demonstrandum.

b) Vollständige Induktion nach n

Induktionsanfang $n = 1$*:*

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = c; f(x) = c \text{ ist ein Polynom 0-ten Grades.}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$f^{(n)}(x) = 0 \Rightarrow f(x) \text{ ist ein Polynom vom Grad} < n.$$

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$f^{(n+1)}(x) = (f')^{(n)}(x) = 0 \Rightarrow^{(I.V.)} f'(x) \text{ ist ein Polynom vom Grad } < n.$$

Sei also $f'(x) =: \sum_{i=0}^{n-1} a_n x^n$. Dann lassen sich die Summanden einzeln integrieren und es gilt:

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_n x^n \Rightarrow f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_n}{n+1} x^{(n+1)} + c = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{n-1}}{n} x^n + c,$$

was ein Polynom vom Grad $< n+1$ ist.

IV Variationen, Verallgemeinerungen, Abschwächungen

In a) und b) werden bereits sehr allgemeine Aussagen bewiesen. Von der Taylorformel ausgehend lässt sich das Restglied variieren, so sind

$$\begin{aligned} &\forall\, 1 \le p \le n+1: \\ &R_n = f^{(n+1)}(\xi) \tfrac{(x-\xi)^{n+1-p}(x-a)^p}{p \cdot n!} && \text{Schlömilch'sches Restglied} \\ &p = 1 \Rightarrow \\ &R_n = f^{(n+1)}(\xi) \tfrac{(x-\xi)^n (x-a)}{n!} && \text{Cauchy'sches Restglied} \\ &p = n+1 \Rightarrow \\ &R_n = f^{(n+1)}(\xi) \tfrac{(x-a)^p}{(n+1)!} && \text{Lagrange'sches Restglied} \end{aligned}$$

andere Darstellungen, die sich beweisen ließen.
Weiterführende Fragestellungen könnten z.B. lauten, unter welchen Bedingungen die Taylordarstellung einer Funktion die Funktion darstellt (also die Potenzreihe gegen die Funktion konvergiert) oder das Restglied gegen 0 konvergiert.

Eine prinzipiell andere Möglichkeit, eine Funktion zu approxieren, ist die *Fourieranalyse/-synthese.*

V Nutzen & Anwendungen

Die Anwendungen der Taylorentwicklung in der Mathematik etwa zur Darstelung einer gegebenen Funktion als Potenzreihe (Reihendarstellung der Sinus-, Cosinus- und Exponentialfunktion) sind vielfältig, auf der Taylordarstellung basieren zudem physikale Sätze und Erkenntnisse wie die Kleinwinkelnäherung des Sinus ($\sin\alpha \approx \alpha$ für kleine α) oder der Grenzfall zwischen relativistischer und nicht-relativistischer Energiebetrachtung (kinetische Energie nach Einstein bzw. Newton sind nach Taylorentwicklung ungefähr gleich).

Johannes Flake · 13. März 2007