Version 08.02. Februar 2007

MIA – Analysis einer reellen Veränderlichen – WS 06/07

Kurzfassung
Martin Schottenloher

$\infty \infty \infty$

Kapitel VII. Integration in einer Veränderlichen

(Skizze)

In diesem Kapitel wird die Integration von Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ auf Flächenbestimmung zurückgeführt und damit zugleich der Begriff der Flächenbestimmung präzisiert. Es wird hier nur die Integration von stetigen Funktionen behandelt und in Beziehung zum Begriff der Stammfunktion gesetzt, so dass zum Schluss (des Kapitels und der Vorlesung) auf eine Reihe von Integrationsmethoden eingegangen werden kann.

§20 Integration durch Stammfunktionen

Zur Motivation: Gegeben sei eine nichtnegative Funktion $f : I \to \mathbb{R}$. Man betrachte das Problem der Flächenbestimmung (Inhaltsmessung) der Fläche oberhalb eines kompakten Intervalls $[a, b]$ und unterhalb des Graphen Γ_f. Das Ergebnis sei $I_a^b f \in \mathbb{R}$.

Zugrundelegt wird der Inhaltsbegriff von Rechtecken und Trapezen. Dann ist klar, dass für eine konstante Funktion $f(x) = m$ als Flächeninhalt $I_a^b f = (b - a)m$ herauskommt. und für eine lineare Funktion $f(x) = mx$ der Inhalt $I_a^b f = \frac{1}{2}(mb + ma)(b - a) = \frac{1}{2}m(b^2 - a^2)$.

Wir stellen an eine allgemeine Inhaltsmessung $I_a^b f$ die folgende Forderung:

(20.1) Forderung: Für die zu integrierende Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$, soll für alle $a, b, c \in I$, $a < c < b$:

(I1)

(I2)

(20.2) Satz: *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $f \geq 0$, mit $\mathrm{I1}$ und $\mathrm{I2}$ für alle $a, b, c \in I$, $a < c < b$. Setze für ein $a \in I$ und $x > a, x \in I$,*

$$F(x) := I_a^x f\,.$$

Ist dann f stetig, so ist F differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$ für $x \in I \cap\,]a, \infty]$. Analog für $F(x) := I_x^b\,,\ x < b$.

(20.3) Definition:

(20.4) Bemerkungen:

1°

2°
3°
4°
5°

(20.5) Notation:

(20.6) Satz:

(20.7) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ hat eine Stammfunktion F der Form

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt\,.$$

(20.8) Regeln:

1°
2°
3°
4°

§21 Integrationsmethoden

(21.1) Integration durch Stammfunktion:

(21.2) Partielle integration:

(21.3) Integration durch Substition:

(21.4) Partialbruchzerlegung:

(21.5) Numerische Integration: (Sehnentrapezregel)

(21.6) Satz: (Mittelwertsatz der Integralrechnung)