Version 01.02. Januar 2007

MIA – Analysis einer reellen Veränderlichen – WS 06/07

Kurzfassung

Martin Schottenloher

$\infty\,\infty\,\infty$

Kapitel VI. Differenzierbare Funktionen in einer Veränderlichen

In diesem Kapitel werden differenzierbare Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ studiert, die auf einem nicht-trivialen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert sind. Dabei sind offene, halboffene und abgeschlossene beschränkte Intervalle zugelassen, wie auch $]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$, $]a, \infty[$, $[a, \infty[$, $]-\infty, b]$, $]-\infty, b[$, mit $a, b \in \mathbb{R}$. In diesem Kapitel ist I also immer ein solches Intervall.

§16 Der Begriff der differenzierbaren Funktion

(16.1) Definition: Für eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ und $a, b \in I$ mit $a \neq b$ ist

$$f[a; b] := \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

der *Differenzenquotient von f in a bezüglich b*.

Bedeutung: $f[a; b] := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ist die Steigung der Sekante

$$y = f[a; b] \cdot x + (f(a) - f[a; b] \cdot a)$$

zum Graphen $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in I\}$ durch die Punkte $(a, f(a)), (b, f(b))$.

f ist in $a \in I$ *differenzierbar*, wenn

$$\lim_{b \to a} f[a; b]$$

existiert. $f'(a) := \lim_{b \to a} f[a; b]$ ist dann die *Ableitung von f in a* oder auch der *Differentialquotient von f in a*.

f heißt *differenzierbar in I*, wenn f in allen $a \in I$ differenzierbar ist.

Bedeutung: $f'(a)$ ist (im Falle der Existenz des Grenzwertes $\lim_{b \to a} f[a; b]$) die Steigung *der Tangente $T_f(a)$ an den Graphen Γ_f in* $(a, f(a)) \in \Gamma_f$. Tangentengleichung:

$$y = f'(a)x + (f(a) - f'(a)a)\,.$$

Äquivalenz: f in $a \in I$ differenzierbar $\iff \forall\, x_k \in I : x_k \longrightarrow a \implies \lim_{k \to \infty} f[a; x_k]$ existiert.

Schreibweisen:

1) $f'(a) = \lim_{b \to a} f[a; b] = \lim_{x \to a} f[a; x] = \lim_{h \to 0} f[a; a + h] = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

2) $\dot{f}(a)$ statt $f'(a)$ oder $f'(a) = \frac{dy}{dx}(a) = \frac{df}{dx}(a) = \frac{df}{dx}_{|x=a} = \frac{d}{dx}_{|x=a} f$ und andere Notationen.

(16.2) Satz: *Jede in $a \in I$ differenzierbare Funktion ist dort stetig.*

(16.3) Beispiele:

1° Jede konstante Funktion $f(x) := c$, $x \in I = \mathbb{R}$, ist differenzierbar in allen $a \in \mathbb{R}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist. Es gilt: $f' = 0$, d.h. $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2° Die „Identität“ $f(x) := x$, $x \in I = \mathbb{R}$, ist differenzierbar in allen $a \in \mathbb{R}$, und es gilt $f' = 1$.

3° $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, ist differenzierbar, und es gilt $f'(x) = 2x$.

4° $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, ist stetig und lipschitzstetig. f ist allen $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ differenzierbar mit $f'(a) = 1$ für $a > 0$ und $f' = -1$ für $a < 0$. f ist in $a = 0$ nicht differenzierbar.

5° Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, ist in allen $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt $\frac{d}{dx}_{|x=a} e^x = e^a$.

(16.4) Satz: $f = \sum c_n T^n$ sei eine konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist

$$x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \, , \; x \in]-\rho, \rho[\, ,$$

in allen $a \in]-\rho, \rho[$ differenzierbar mit [16.01.07]

$$f'(a) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n a^{n-1} \, .$$

Bemerkung: Insbesondere gilt $(c_n x^n)' = n c_n x^{n-1}$ und der Satz bedeutet, dass Potenzreihen gliedweise differenziert werden können. Es gilt auch: Die (früher eingeführte, vgl. 14.5) formale Ableitung $f' = \sum (n+1) c_{n+1} T^n$ der formalen Potenzreihe f ist als Funktion im Konvergenzintervall die tatsächliche Ableitung im Sinne von 16.1.

(16.5) Folgerungen:

1° $\sin$ ist in $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $\sin' = \cos$.

2° $\cos$ ist in $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $\cos' = -\sin$.

3° $\sinh x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$, („Sinus Hyperbolicus“) ist differenzierbar in $\mathbb{R}$ mit

$$\sinh'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} =: \cosh x \, .$$

(16.6) Regeln: (Permanenzeigenschaften) $f, g : I \to \mathbb{R}$ *seien differenzierbar in* $a \in I$, $I \subset \mathbb{R}$. *Dann:*

1° $f + g$ *ist differenzierbar in* a *mit* $(f+g)'(a) = f'(a) + g'a)$.

2° fg *ist differenzierbar in* a *mit* $(fg)'(a) = f'a)g(a) + f(a)g'(a)$.

3° *Im Falle* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in I$ *ist auch* $\frac{f}{g}$ *in* a *differenzierbar mit*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2} \, .$$

(16.7) Kettenregel: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in $a \in I$ differenzierbar, und sei $g : J \to \mathbb{R}$ in $f(a)$ differenzierbar mit $f(I) \subset J$. Dann ist die Komposition $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in a differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)\,(a) = g'(f(a))f'(a)\,.$$

(16.8) Weitere Beispiele:

1° $f(x) = x\,|x|$, $x \in \mathbb{R}$. f ist in allen Punkten $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt $f'(a) = 2\,|a|$.

2° $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}\,, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $f(0) = 0$ ist differenzierbar, und es gilt $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\,,\ x \neq 0\,,$ und $f'(0) = 0\,.$ Die Funktion f' ist in 0 nicht stetig und daher erst recht nicht differenzierbar.

3° $f(x) = \sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}}$, $x \in \,]0, \infty[$, ist differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{k}\sqrt[k]{x^{-k+1}} = \frac{1}{k}\,x^{-\frac{k-1}{k}} = \frac{1}{k}\,x^{\frac{1}{k}-1}\,.$$

[[Beweis[1] von 3° im Falle $k = 2$:

$$f[x;x+h] = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \longrightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

$k > 2$ analog!]]

§17 Kritische Punkte und Mittelwertsatz

Ein *kritischer* Punkt einer differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist ein Punkt $a \in I$ mit $f'(a) = 0$. Kritische Punkte werden auch *stationäre* Punkte genannt. Sie können verwendet werden, um Maxima und Minima der Funktion f aufzuspüren, und sie spielen deshalb eine wichtige Rolle in der Formulierung physikalischer Grundprinzipien (Fermatprinzip, Hamiltonprinzip).

(17.1) Satz: $f : I \to \mathbb{R}$ *sei eine differenzierbare Funktion in einem offenen Intervall und* f *habe in* $\xi \in I$ *ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum. Dann gilt* $f'(\xi) = 0$.

Bemerkungen: Es handelt sich nur um ein notwendiges Kriterium. Beispielsweise ist die Funktion $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, streng monoton wachsend, hat also kein lokales Maximum oder Minimum. Aber es gilt $f'(0) = 0$, d.h. 0 ist kritischer Punkt.

Die Bedingung, dass I ein offenes Intervall sein muss, kann nicht fortgelassen werden. Denn $f(x) = x$ hat in Bezug auf das Intervall $]a, b]$ in b ein Maximum, aber es gilt sicherlich nicht $f'(b) = 0$, weil $f' = 1$.

(17.2) Satz von Rolle: *Die Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sei stetig und in* $]a, b[$ *differenzierbar,* $a < b$. *Unter der Voraussetzung* $f(a) = f(b)$ *gibt es dann ein* $\xi \in]a, b[$ *mit* $f'(\xi) = 0$.

Bedeutung: Parallel zur x-Achse bzw. zur Sekante durch $(a, f(a)), (b, f(b))$ gibt es eine Tangente an den Graphen Γ_f der Funktion f. [19.01.07]

(17.3) Mittelwertsatz: *Die Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sei stetig und in* $]a, b[$ *differenzierbar,* $a < b$. *Dann existiert* $\xi \in]a, b[$ *mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f[b; a]\,.$$

[1]nicht vorgetragen

Allgemeiner: Ist $g:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ eine weitere stetige Funktion, die in $]a,b[$ noch differenzierbar ist, so gibt es $\xi\in]a,b[$ mit

$$f'(\xi)\,(g(b)-g(a)) = g'(\xi)\,(f(b)-f(a))\ .$$

Bedeutung: Es gibt stets ein ξ, so dass die Tangente an Γ_f in $(\xi, f(\xi)$ parallel zur Sekante durch $(a,f(a)),(b,f(b))$ verläuft.

(17.4) Folgerungen: (Monotonie, Extremwerte)

1° $f'\geq 0 \implies f$ ist monoton wachsend.

2° Sei $f:I\to\mathbb{R}$ differenzierbar. Es gebe $a\in I$ und $r>0$ mit $U_r(a)\subset I$ und $f'(a)=0$. Ist dann auch noch f' in $U_r(a)$ differenzierbar und gilt $f''(a)\neq 0$, so hat f in a ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Maximum, wenn $f''(a)<0$ und ein lokales Minimum, wenn $f''(a)>0$.

(17.5) Folgerungen: (Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen)

1° Jede Funktion $f:I\to\mathbb{R}$ auf einem Intervall I mit $f'=0$ ist eine konstante Funktion. Es folgt daher: Das *Anfangswertproblem*

$$f'=0 \quad \text{und} \quad f(0)=y_0\,,$$

hat die eindeutig bestimmte Lösung $f(x)=y_0$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

2° Sind $f,g:I\to\mathbb{R}$ differenzierbar auf dem Intervall I mit $f'=g'$, so gibt es eine Konstante $c\in\mathbb{R}$ mit $f=g+c$.

3° Sei $\lambda\in\mathbb{R}$. Zu jedem $y_0\in\mathbb{R}$ gibt es genau eine differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, die das Anfangswertproblem

$$f'=\lambda f \quad \text{und} \quad f(0)=y_0$$

löst: $f(X)=y_0e^{\lambda x}$.

4° Analog für das System von Differentialgleichungen: Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} f' &= g & \qquad f(0) &= 0\\ g' &= -f & \qquad g(0) &= 1 \end{aligned}$$

hat die eindeutig bestimmte Lösung $f=\sin\,,\ g=\cos$.

5° Ebenso:

$$\begin{aligned} f' &= g & \qquad f(0) &= 0\\ g' &= f & \qquad g(0) &= 1 \end{aligned}$$

hat die eindeutig bestimmte Lösung $f=\sinh\,,\ g=\cosh$.

6° Wenn bereits bekannt ist, dass die Lösungen des jeweiligen Anfangswertproblems sich in konvergente Potenzreihen entwickeln lassen, so liefern die Differentialgleichungen Rekursionsgleichungen für die Koeffizienten der Potenzreihe.

So zum Beispiel in 3°: Mit dem Ansatz $f=c_nT^n$ ergibt sich aus $f'=\lambda f$ wegen $f(0)=y_0=c_0$, $f'(0)=\lambda f(0)$ und $f'(0)=c_1$, $f''(0)=\lambda f'(0)=\lambda^2 f(0)=2!c_2\,,\ldots,\ \lambda^k f(0)=k!c_k$, also $f(x)=\sum\frac{1}{k!}\lambda^k y_0 x^k = y_0\sum\frac{1}{k!}(\lambda x)^k\,.$

(17.6) Folgerung: (Schrankensatz) *Sei $f:I\to\mathbb{R}$ differenzierbar mit beschränkter Ableitung. Dann ist f lipschitzstetig auf dem Intervall und daher auch gleichmäßig stetig.*

Beispielsweise hat f eine beschränkte Ableitung, wenn I kompakt ist und die Ableitung f' stetig ist.

[[(Ab hier unvollständig!)]]

§18 Umkehrfunktion

Umkehrfunktionen von bereits bekannten Funktionen (wie z.B. $e^x, \sin x, \tan x$) liefern neue interessante und wichtige Funktionen.

(18.1) Umkehrsatz: *Die stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei in $]a,b[$ differenzierbar. In $x_0 \in]a,b[$ gelte:*

$$f'(x_0) \neq 0 \quad \text{und} \quad f' \text{ ist in } x_0 \text{ stetig} .$$

Dann gibt es ein offenes Intervall $]\alpha,\beta[\subset I$, $a \leq \alpha < x_0 < \beta \leq b$, so dass $f|_{]\alpha,\beta[}$ umkehrbar ist mit $f(]\alpha,\beta[) =]A,B[$, und die Umkehrfunktion $g = (f|_{]\alpha,\beta[})^{-1} :]A,B[\to]\alpha,\beta[$ ist differenzierbar mit der Ableitung ($y \in]A,B[$)

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} ,$$

bzw. für $x \in]\alpha,\beta[$

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} .$$

[23.01.07]

Anwendungen:

(18.2) Exponentialfunktion und Logarithmus:

(18.3) Weitere Beispiele von wichtigen Umkehrfunktionen:

(18.4) Hilfssatz: (Umkehrsatz für monotone Funktionen)[2] *Eine streng monotone Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall I hat eine stetige Umkehrfunktion $g : f(I) \to I$.*

[[Beweis: Als streng monotone Funktion ist f injektiv, also existiert die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ auf der Bildmenge $f(I)$. Zu zeigen ist, dass g stetig ist. f sei streng monoton wachsend. Dann ist auch g streng monoton wachsend. Seien $a \in I$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so dass $U_\varepsilon(a) =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset I$. Aus der Monotonie folgt $f(a-\varepsilon) < f(a) < f(a+\varepsilon)$. Daher gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(a-\varepsilon) < f(a) - \delta$ und $f(a) + \delta < f(a+\varepsilon)$. Für alle $y \in I \cap]f(a)-\delta, f(a)+\delta[$ ist wegen der Monotonie von g stets $a - \varepsilon = g(f(a-\varepsilon)) < g(f(a)-\delta) < g(y) < g(f(a)+\delta) < g(f(a+\varepsilon)) = a+\varepsilon$, also $|g(y) - a| < \varepsilon$. Wegen $a = g(f(a)$ ist das gerade die Bedingung für die Stetigkeit von g in $f(a)$

Im Falle einer monoton fallenden Funktion f verfährt man analog.]]

§19 Anwendungen des Mittelwertsatzes

Dieser Paragraph gliedert sich in die folgenden vier Abschnitte, in denen verschiedene wichtige Anwendungen des Mittelwertsatzes behandelt werden:

A. Grenzwertregeln von de l'Hôpital
B. Der Taylorsche Satz

[2] in der Vorlesung nicht vorgetragen

C. Konvexe und konkave Funktionen
D. Das Newtonverfahren

A. Grenzwertregeln von de l'Hôpital

(19.1) Satz:

B. Der Satz von Taylor

[26.01.07]

C. Konvexe und konkave Funktionen

(19.10) Lemma:

(19.11) Höldersche Ungleichung: Für $p, q \in]1, \infty[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt für alle $z, w \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n), w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$:

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j w_j| \leq \|z\|_p \|w\|_q \ .$$

[30.01.07]

(19.12) Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

(19.13) Minkowski-Ungleichung:

(19.14) Folgerung:

D. Newtonverfahren

(19.14) Newtonverfahren: