Version 23.01. Januar 2007

MIA – Analysis einer reellen Veränderlichen – WS 06/07

Kurzfassung

Martin Schottenloher

$\infty\,\infty\,\infty$

Kapitel VI. Differenzierbare Funktionen in einer Veränderlichen

In diesem Kapitel werden differenzierbare Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ studiert, die auf einem nicht-trivialen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert sind. Dabei sind offene, halboffene und abgeschlossene beschränkte Intervalle zugelassen, wie auch $]-\infty,\infty[=\mathbb{R}$, $]a,\infty[$, $[a,\infty[$, $]-\infty,b]$, $]-\infty,b[$, mit $a,b \in \mathbb{R}$. In diesem Kapitel ist I also immer ein solches Intervall.

§16 Der Begriff der differenzierbaren Funktion

(16.1) Definition: Für eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ und $a,b \in I$ ist

$$f[a;b] := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

der *Differenzenquotient von f in a bezüglich b*.

Bedeutung: $f[a;b] := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ist die Steigung der Sekante

$$y = f[a;b]\cdot x + (f(a) - f[a;b]\cdot a)$$

zum Graphen $\Gamma_f = \{(x,f(x)) \,|\, x \in I\}$ durch die Punkte $(a,f(a)),(b,f(b))$.

f ist in $a \in I$ *differenzierbar*, wenn

$$\lim_{b\to a} f[a;b]$$

existiert. $f'(a) := \lim_{b\to a} f[a;b]$ ist dann die *Ableitung von f in a* oder auch der *Differentialquotient von f in a*. f heißt *differenzierbar in I*, wenn f in allen $a \in I$ differenzierbar ist.

Bedeutung: $f'(a)$ ist (im Falle der Existenz des Grenzwertes $\lim_{b\to a} f[a;b]$) die Steigung *der Tangente $T_f(a)$ an den Graphen Γ_f in $(a,f(a)) \in \Gamma_f$*. Tangentengleichung:

$$y = f'(a)x + (f(a) - f'(a)a)\,.$$

Äquivalenz: f in $a \in I$ differenzierbar $\iff \forall\, x_k \in I : x_k \longrightarrow a \implies \lim_{k\to\infty} f[a;x_k]$ existiert.

Schreibweisen:

1) $f'(a) = \lim_{b\to a} f[a;b] = \lim_{x\to a} f[a;x] = \lim_{h\to a} f[a;a+h] = \lim_{h\to a} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

2) $\dot{f}(a)$ statt $f'(a)$ oder $f'(a) = \frac{dy}{dx}(a) = \frac{df}{dx}(a) = \frac{df}{dx}_{|x=a} = \frac{d}{dx}_{|x=a} f$ und andere.

(16.2) Satz: *Jede in $a \in I$ differenzierbare Funktion ist dort stetig.*

(16.3) Beispiele:

1° Jede konstante Funktion $f(x) := c$, $x \in I = \mathbb{R}$, ist differenzierbar in allen $a \in \mathbb{R}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist. Es gilt: $f' = 0$, d.h. $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2° Die „Identität“ $f(x) := x$, $x \in I = \mathbb{R}$, ist differenzierbar in allen $a \in \mathbb{R}$ mit $f' = 1$.

3° $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, ist differenzierbar mit $f'(x) = 2x$.

4° $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, ist stetig und lipschitzstetig. f ist allen $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ differenzierbar mit $f'(a) = 1$ für $a > 0$ und $f' = -1$ für $a < 0$. f ist in $a = 0$ nicht differenzierbar.

5° Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, ist in allen $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\frac{d}{dx}_{|x=a} e^x = e^a$.

(16.4) Satz: $f = \sum c_n T^n$ sei eine konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist

$$x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \, , \; x \in]-\rho, \rho[\, ,$$

in allen $a \in]-\rho, \rho[$ differenzierbar mit

$$f'(a) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n a^{n-1} \, .$$

[16.01.07]

Bemerkung: Insbesondere gilt $(c_n x^n)' = n c_n x^{n-1}$ und der Satz bedeutet, dass Potenzreihen gliedweise differenziert werden können. Auch: Die (früher eingeführte, vgl. 14.5) formale Ableitung $f' = \sum (n+1) c_{n+1} T^n$ von f ist als Funktion im Konvergenzintervall die tatsächliche Ableitung im Sinne von 16.1.

(16.5) Folgerungen:

1° $\sin$ ist in $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $\sin' = \cos$.

2° $\cos$ ist in $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $\cos' = -\sin$.

3° $\sinh x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$ („Sinus Hyporbolicus“) ist differenzierbar in $\mathbb{R}$ mit

$$\sinh'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} =: \cosh x \, .$$

(16.6) Regeln: (Permanenzeigenschaften) $f, g : I \to \mathbb{R}$ *seien differenzierbar in* $a \in I$, $I \subset \mathbb{R}$. *Dann:*

1° $f + g$ *ist differenzierbar in* a *mit* $(f+g)'(a) = f'(a) + g'a)$.

2° fg *ist differenzierbar in* a *mit* $(fg)'(a) = f'a)g(a) + f(a)g'(a)$.

3° *Im Falle* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in I$ *ist auch* $\frac{f}{g}$ *in* a *differenzierbar mit*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2} \, .$$

(16.7) Kettenregel: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in $a \in I$ differenzierbar, und sei $g : J \to \mathbb{R}$ in $f(a)$ differenzierbar mit $f(I) \subset J$. Dann ist die Kompostion $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in a differenzierber und es gilt

$$(g \circ f)(a) = g'(f(a))f'(a)\,.$$

(16.8) Beispiele:

1° $f(x) = x\,|x|$, $x \in \mathbb{R}$. f ist in allen Punkten $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(a) = 2\,|a|$.

2° $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}\,, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $f(0 = 0$ ist differenzierbar mit $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, und $f'(0) = 0$. Die Funktion f' ist in 0 nicht stetig und daher erst recht nicht differenzierbar.

3° $f(x) = \sqrt[k]{(}x)$, $x \in]0, \infty[$ ist differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{1}{k} \sqrt[k]{x^{-k+1}} = \frac{1}{k}\, x^{-\frac{k-1}{k}}\,.$$

[[Beweis von 3° im Falle $k = 2$:

$$f[x; x+h] = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \longrightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

$k > 2$ analog!]]

§17 Kritische Punkte und Mittelwertsatz

(17.1) Satz: *$f : I \to \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion in einem offenen Intervall und f habe in $\xi \in I$ ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum. Dann gilt $f'(\xi) = 0$.*

(17.2) Satz von Rolle:

(17.3) Mittelwertsatz:

(17.4) Folgerungen: (Monotonie, Extremwerte)

1°

2°

(17.5) Folgerungen: (Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen)

1° Jede Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I mit $f' = 0$ ist eine konstante Funktion. Es folgt daher: Das *Anfangswertproblem* (= AWP)

$$f' = 0\,,\ f(0) = y_0$$

hat die eindeutig bestimmte Lösung $f(x) = y_0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2°

3°

4°

5°

6°

(17.6) Folgerung: (Schrankensatz)

§18 Umkehrfunktion

Umkehrfunktionen von bereits bekannten Funktionen (wie z.B. $e^x, \sin x, \tan x$ liefern neue interessante und wichtige Funktionen.

(18.1) Umkehrsatz: [23.01.07]

Anwendungen: