

MIA – Analysis einer reellen Veränderlichen – WS 06/07

Kurzfassung
Martin Schottenloher

∞ ∞ ∞

Kapitel V. Stetige Funktionen in einer Veränderlichen

Es werden in diesem Kapitel Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ studiert, die auf einer nichtleeren Menge $D \subset \mathbb{R}$ definiert sind. Meistens ist D ein Intervall. Im Zentrum der mathematischen Untersuchung aus der Sicht der Analysis steht das Verhalten der Funktionswerte von $f(x)$ bei kleinen Änderungen der Argumente $x \in D$.

§13 Der Begriff der stetigen Funktion

(13.1) Definition: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, heißt *stetig im Punkte* $a \in D$, wenn für alle konvergenten Folgen (a_n) mit $a_n \in D$ und $a_n \rightarrow a$ stets $f(a_n) \rightarrow f(a)$ gilt. Sie heißt *stetig* in D , wenn sie in allen Punkten aus D stetig ist.

(13.2) Beispiele:

1° Jede konstante Funktion $f(x) := c$, $x \in D = \mathbb{R}$, ist stetig in allen $a \in \mathbb{R}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

2° Die „Identität“ $f(x) := x$, $x \in D = \mathbb{R}$, ist stetig in allen $a \in \mathbb{R}$.

3° Die Exponentialfunktion $f(x) := e^x$, $x \in D = \mathbb{R}$, ist stetig in allen $a \in \mathbb{R}$. Das folgt aus dem Additionstheorem und der folgenden Aussage:

[19.12.06]

(13.3) Lemma: $z_n \in \mathbb{C}$, $z_n \rightarrow 0$, $\implies e^{z_n} \rightarrow 1 = e^0$.

(Im nächsten Paragraphen werden wir zeigen, dass alle konvergenten Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzintervalls eine stetige Funktion definieren.)

(13.4) Satz: (Permanenzeigenschaften) $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig in $a \in D$, $D \subset \mathbb{R}$. Dann:

1° $f + g$ ist stetig in a .

2° fg ist stetig in a .

3° Im Falle $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ ist auch $\frac{f}{g}$ in a stetig.

4° $\min\{f, g\}$ und $\max\{f, g\}$ sind stetig in a .

5° $f_+ := \max\{f, 0\}$ und $f_- := \max\{-f, 0\}$ sind stetig in a und daher auch $|f| = f_+ + f_-$.

(13.5) Weitere Beispiele:

1° Alle Monome, $x \mapsto x^k$, $x \in \mathbb{R}$, sind stetige Funktionen.

2° Alle Polynome $P(x) := \sum_{k=0}^m c_k x^k$ sind stetig in $\mathbb{R}$ ($c_0, \dots, c_m \in \mathbb{R}$).

3° Für $k \in \mathbb{N}_1$ ist auch die Funktion $x \mapsto x^{-k}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, stetig.

4° Für Polynome P, Q sind die rationalen Funktionen $\frac{P}{Q}$ in $D := \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$ stetig.

(13.6) Satz: (Stetigkeit der Komposition) Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei in $a \in D$ stetig, und die Funktion $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ sei in $b \in E$ stetig. Gilt dann $f(D) \subset E$ (damit die Komposition $g \circ f$ gebildet werden kann) und $b = f(a)$, so ist die Komposition $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in $a \in D$ stetig.

Also sind Funktionen wie e^{x^2} , $\sin(e^x - x^2)$, $(e^x + |x|)^n \dots$ stetige Funktionen.

(13.7) Weitere Beispiele und Gegenbeispiele:

1° Jede beliebige Funktion $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ist stetig in allen Punkten $a \in \mathbb{Z}$.

2° Sei $a \in D$ mit der Eigenschaft: Es gibt $r > 0$, so dass $U_r(a) \cap D = \{a\}$. Dann ist jede Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in a stetig.

3° Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x < 0$ und $f(x) = 1$ für $x \geq 0$ ist nicht stetig in 0; sie ist in allen anderen Punkten $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig.

4° Sei $f(x) := x - [x]$, $x \in \mathbb{R}$. f ist in allen Punkten $a \in \mathbb{Z}$ nicht stetig, ansonsten stetig.

5° Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist in allen Punkten $a \in \mathbb{R}$ unstetig. Die Restriktion $f|_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig (weil konstant: $f|_{\mathbb{Q}} = 1$).

(13.8) Satz: (ε - δ -Formulierung der Stetigkeit) Für eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und einen Punkt $a \in D$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1° f ist stetig in a .

2° Es gibt ein $r > 0$, so dass die Restriktion $f|_{U_r(a) \cap D} : U_r(a) \cap D \rightarrow \mathbb{R}$ in a stetig ist.

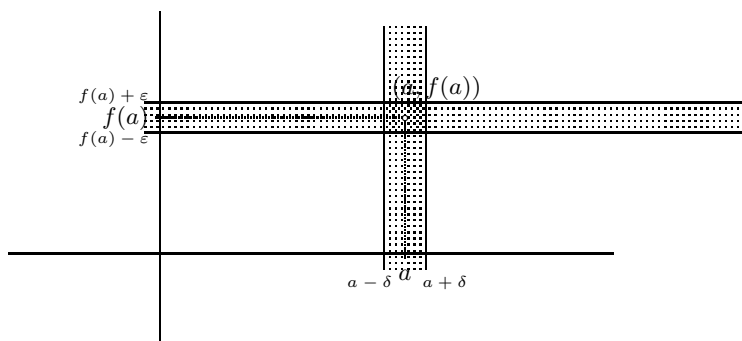
2° Für alle $r > 0$ ist die Restriktion $f|_{U_r(a) \cap D} : U_r(a) \cap D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in a .

3° $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |a - x| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

4° $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(U_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(a))$.

[22.12.06]

(Beachte: $U_\delta(a) =]a - \delta, a + \delta[$, $U_\varepsilon(f(a)) =]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$)



Das Bild soll die folgende Aussage zur Stetigkeit veranschaulichen: Wenn f in a stetig ist, findet man zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ stets ein $\delta > 0$, so dass der auf $U_\delta(a)$ bezogene Graph $\{(x, f(x)) \mid x \in U_\delta(a) \cap D\}$ von f ganz in dem Rechteck $]a - \delta, a + \delta[\times]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$ enthalten ist.

(13.9) Definition: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf einer Menge D definiert, und $b \in \mathbb{R}$ habe die Eigenschaft: $\forall r > 0 : U_r(b) \cap D \neq \emptyset$. Dann hat definitionsgemäß f den Grenzwert C bei b (oder für $x \rightarrow b$),

wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ gilt:

$$|x - b| < \delta \implies |f(x) - C| < \varepsilon.$$

Notation:

$$C = \lim_{x \rightarrow b} f(x) \text{ oder genauer } C = \lim_{x \rightarrow b, x \in D} f(x).$$

(13.10) Satz: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$: Dann ist f genau dann in a stetig, wenn $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ gilt. Ausführlich:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = C \text{ und } C = f(a).$$

(13.11) Bemerkung: $C = \lim_{x \rightarrow b} f(x) \iff$ Für jede Folge (x_n) , $x_n \in D$, mit $x_n \rightarrow b$ gilt $f(x_n) \rightarrow C$.

(13.12) Bemerkung: Für $D =]a, b[$ gilt $b \notin D$, aber die Voraussetzung (vgl. 13.9) $\forall r > 0 : U_r(b) \cap D \neq \emptyset$ ist erfüllt.

(13.13) Definition: Für eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt $b \in \mathbb{R}$ ein *Berührungspunkt* von D , wenn $\forall r > 0 : U_r(b) \cap D \neq \emptyset$.

Die Menge der Berührungspunkte von D heißt die *abgeschlossene Hülle* von D und wird mit $\overline{D}$ bezeichnet.

Ein Berührungspunkt b von D heißt *Häufungspunkt* von D , wenn $\forall r > 0 : (U_r(b) \setminus \{0\}) \cap D \neq \emptyset$.

(13.14) Lemma:

1° Ein Punkt $b \in D$ ist immer Berührungspunkt von D , also $D \subset \overline{D}$, während nicht jeder Punkt $b \in D$ auch ein Häufungspunkt sein muss. Beispiel: $D = \{0\}$ oder allgemeiner wie in 13.7.2°.

2° Die abgeschlossene Hülle $A := \overline{D}$ ist (folgen-)abgeschlossen in folgendem Sinne: Für jede konvergente Folge (x_n) mit $x_n \in A$ gilt $\lim x_n \in A$, und A ist die kleinste Menge mit dieser Eigenschaft, die D enthält.

Das ist der Beginn der Topologie!

Eine natürliche Frage zum Schluss des Paragraphen: Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Hat f eine stetige Fortsetzung nach $\overline{D}$? Das heißt: Gibt es eine Funktion $\overline{f} : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\overline{f}|_D = f$, die stetig ist?

Diese Frage ist gleichbedeutend damit, ob für $b \in \overline{D} \setminus D$ stets der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ existiert. Wenn das der Fall ist, so ist $\overline{f}(b) := \lim_{x \rightarrow b} f(x)$ stetige Fortsetzung. Daran sieht man: Eine stetige Fortsetzung ist – im Falle der Existenz – eindeutig bestimmt.

(13.15) Beispiele:

1° $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ hat eine stetige Fortsetzung $\overline{f}$ nach $\overline{]0, 1[} = [0, 1]$ mit $\overline{f}(0) := 0$.

2° $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-1}$ hat keine stetige Fortsetzung $\overline{f}$ nach $\overline{]0, 1[} = [0, 1]$, denn für $x_n := \frac{1}{n} \rightarrow 0$ ist $f(x_n) = n$ keine in $\mathbb{R}$ konvergente Folge.

3° $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ hat eine stetige Fortsetzung $\overline{f}$ nach $\overline{[0, 1[} = [0, 1]$ mit $\overline{f}(1) := 2$.

4° $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-1} \sin x$ hat stetige Fortsetzung $\bar{f}$ nach $\overline{]0, 1]} = [0, 1]$ mit $\bar{f}(0) := 0$.

§14 Lipschitzbedingung und Stetigkeit

(14.1) Definition: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion.

1° f heißt *lipschitzstetig* (erfüllt eine *Lipschitzbedingung*), wenn es eine Konstante $L > 0$ (die *Lipschitzkonstante*) gibt, so dass für alle $x, y \in D$:

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y|.$$

2° f heißt *lokal lipschitzstetig*, wenn es zu jedem Punkt $a \in D$ ein $r > 0$ gibt, so dass die Restriktion $f|_{U_r(a) \cap D}$ lipschitzstetig ist.

(14.2) Bemerkungen und Beispiele:

1° Lipschitzstetige Funktionen sind stetig.

2° Lokal lipschitzstetige Funktionen ebenfalls sind stetig.

3° $f(x) = x$ und $g(x) = |x|$ sind lipschitzstetige Funktionen.

4° $f(x) = x^2$ ist nicht lipschitzstetig (auf ganz $\mathbb{R}$), aber lokal lipschitzstetig.

5° $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, ist stetig, aber nicht lokal lipschitzstetig.

(14.3) Definition: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn

[09.01.07]

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(14.4) Satz: Jede lipschitzstetige Funktion ist in ihrem Definitionsbereich gleichmäßig stetig.

(14.5) Satz: $f = \sum a_n T^n$ sei konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho_f > 0$. Dann ist für $0 < r < \rho_f$ die durch f gegebene Funktion

$$x \mapsto \hat{f}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, |x| \leq r,$$

lipschitzstetig auf $[-r, r]$. Insbesondere ist $\hat{f}$ stetig auf $]-\rho_f, \rho_f[$ und wird auch mit f bezeichnet.

(14.6) Identitätssatz: Für zwei konvergente Potenzreihen $f = \sum a_n T^n$, $g = \sum b_n T^n$ mit Konvergenzradien größer als $r > 0$ seien die Funktionen $\hat{f}$ und $\hat{g}$ auf dem Intervall gleich, also $\hat{f}(x) = \hat{g}(x)$ für alle $x \in [-r, r]$. Dann sind die Potenzreihen identisch, d.h. $f = g$, also $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folgerung gilt auch, wenn es eine Nullfolge (x_n) mit $0 < |x_n| < r$ gibt, für die stets $\hat{f}(x_n) = \hat{g}(x_n)$ gilt.

§15 Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen

Unter einem kompakten Intervall versteht man ein Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $-\infty < a \leq b < \infty$.

In diesem Paragraphen sei I stets ein kompaktes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ immer eine stetige Funktion auf diesem Intervall.

Wesentlich ist die folgende wohlbekannte Eigenschaft von I (vgl. §8):

(15.1) Satz: Jede Folge (x_n) , $x_n \in I$, hat eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in I$.

(15.2) Satz: f ist beschränkt: Es gibt $M > 0$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in I$.

(15.3) Satz: f nimmt Supremum und Infimum an: Es gibt $x_{\min}, x_{\max} \in I$ mit $f(x_{\min}) = \inf f(I) = \min f(I)$ und $f(x_{\max}) = \sup f(I) = \max f(I)$.

(15.4) Zwischenwertsatz: Zu jedem Wert η zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein $\xi \in I$ mit $f(\xi) = \eta$.

(15.5) Folgerungen:

1° Das Bild $f(J)$ eines Intervalls unter einer stetigen Abbildung $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ ist wieder ein Intervall. Für eine kompaktes Intervall I ist $f(I)$ wieder ein kompaktes Intervall, und zwar gilt: $f(I) = [f(x_{\min}), f(x_{\max})]$.

2° Sei $f(a)f(b) < 0$. Dann hat f eine Nullstelle $\xi \in I : f(\xi) = 0$ hat eine Lösung, nämlich ξ .

3° Jedes Polynom $f = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ ungeraden Grades n hat eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ ($c_k \in \mathbb{R}, c_n \neq 0, n$ ungerade).

4° f ist genau dann injektiv, wenn f strikt monoton ist (also entweder strikt monoton wachsend oder strikt monoton fallend). Dabei heißt f *strikt monoton wachsend*, wenn für alle $x, y \in I$ gilt: $x < y \implies f(x) < f(y)$. Analog ist „*strikt monoton fallend*“ definiert.

5° (Fixpunktsatz) Im Falle $f(I) \subset I$ hat f einen Fixpunkt $\xi \in I$, d.h. $f(\xi) = \xi$.

(15.6) Definition: Die kleinste positive Nullstelle von $\cos$ wird als die Hälfte von π definiert: $\pi := 2 \min\{x > 0 \mid \cos x = 0\}$. [12.01.07]

Es ist $\sqrt{2} < \frac{\pi}{2} < \sqrt{6 - \sqrt{12}}$. Aus $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ folgt $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Daraus ergibt sich unmittelbar:

$$e^{\frac{1}{2}\pi i} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1$$

.

(15.7) Bemerkung: Für $\varphi \in [0, \pi]$ ist φ die (orientierte, elementargeometrische) Bogenlänge des Einheitskreisbogens in $\mathbb{C}$ von 1 nach $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ in folgendem Sinne:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left| e^{i \frac{k}{n} \varphi} - e^{i \frac{k-1}{n} \varphi} \right| = \varphi.$$

Insbesondere ist π die Länge des Halbkreisbogens, das bedeutet, dass diese eigentliche Definition von π (15.6) mit der früheren, vorläufigen Definition (vgl. 7.12.4°) zusammenpasst.

(15.8) Folgerung: Die Restriktion $\cos : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 1]$ der Cosinusfunktion auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ ist surjektiv und injektiv. Daher gibt es Polarkoordinaten: Zu jedem $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, gibt es eindeutig bestimmte $r \in]0, \infty[$ und $\varphi \in [0, \pi[$ mit $z = re^{i\varphi}$.

(15.9) Satz: Für alle $z \in \mathbb{C}$, alle $\varphi \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

1° $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos z$, $\cos(z + \frac{\pi}{2}) = -\sin z$

2° $\sin(z + \pi) = -\sin z$, $\cos(z + \pi) = -\cos z$.

3° $\sin(z + 2\pi k) = \sin z$, $\cos(z + 2\pi k) = \cos z$. Also $e^{z+2\pi ik} = e^z$.

4° $e^{i\varphi} = 1 \iff \exists n \in \mathbb{Z} : \varphi = 2\pi n$.

(15.10) Satz: Jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist dort gleichmäßig stetig.