Version 30.12. Dezember 2006

MIA – Analysis einer reellen Veränderlichen – WS 06/07

Kurzfassung

Martin Schottenloher

$\infty\,\infty\,\infty$

Kapitel V. Stetige Funktionen in einer Veränderlichen

Es werden in diesem Kapitel Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ studiert, die auf einer nichtleeren Menge $D \subset \mathbb{R}$ definiert sind. Meistens ist D ein Intervall. Im Zentrum der mathematischen Untersuchung aus der Sicht der Analysis steht das Verhalten der Funktionswerte von $f(x)$ bei kleinen Änderungen der Argumente $x \in D$.

§13 Der Begriff der stetigen Funktion

(13.1) Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, heißt *stetig im Punkte* $a \in D$, wenn für alle konvergenten Folgen (a_n) mit $a_n \in D$ und $a_n \longrightarrow a$ stets $f(a_n) \longrightarrow f(a)$ gilt. Sie heißt *stetig* in D, wenn sie in allen Punkten aus D stetig ist.

(13.2) Beispiele:

1° Jede konstante Funktion $f(x) := c$, $x \in D = \mathbb{R}$, ist stetig in allen $a \in \mathbb{R}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

2° Die „Identität“ $f(x) := x$, $x \in D = \mathbb{R}$, ist stetig in allen $a \in \mathbb{R}$.

3° Die Exponentialfunktion $f(x) := e^x$, $x \in D = \mathbb{R}$, ist stetig in allen $a \in \mathbb{R}$. Das folgt aus dem Additionstheorem und der folgenden Aussage: [19.12.06]

(13.3) Lemma: $z_n \in \mathbb{C}$, $z_n \longrightarrow 0$, $\Longrightarrow$ $e^{z_n} \longrightarrow 1 = e^0$.

(Im nächsten Paragraphen werden wir zeigen, dass alle konvergenten Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzintervalls eine stetige Funktion definieren.)

(13.4) Satz: (Permanenzeigenschaften) $f, g : D \to \mathbb{R}$ *seien stetig in* $a \in D$, $D \subset \mathbb{R}$. *Dann:*

1° $f + g$ *ist stetig in* a.

2° fg *ist stetig in* a.

3° *Im Falle* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in D$ *ist auch* $\frac{f}{g}$ *in* a *stetig.*

4° $\min\{f, g\}$ *und* $\max\{f, g\}$ *sind stetig in* a.

5° $f_+ := \max\{f, 0\}$ *und* $f_- := \max\{-f, 0\}$ *sind stetig in* a *und daher auch* $|f| = f_+ + f_-$.

(13.5) Weitere Beispiele:

1° Alle Monome, $x \mapsto x^k$, $x \in \mathbb{R}$, sind stetige Funktionen.

2° Alle Polynome $P(x) := \sum_{k=0}^{m} c_k x^k$ sind stetig in $\mathbb{R}$ ($c_0, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$).

3° Für $k \in N_1$ ist auch die Funktion $x \mapsto x^{-k}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, stetig.

4°Für Polynome P, Q sind die rationalen Funktionen $\frac{P}{Q}$ in $D := \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$ stetig.

(13.6) Satz: (Stetigkeit der Komposition) *Die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *sei in* $a \in D$ *stetig, und die Funktion* $g : E \to \mathbb{R}$ *sei in* $b \in E$ *stetig. Gilt dann* $f(D) \subset E$ *(damit die Komposition* $g \circ f$ *gebildet werden kann) und* $b = f(a)$*, so ist die Komposition* $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ *in* $a \in D$ *stetig.*

Also sind Funktionen wie e^{x^2}, $\sin(e^x - x^2)$, $(e^x + |x|)^n$ ... stetige Funktionen.

(13.7) Weitere Beispiele und Gegenbeispiele:

1° Jede beliebige Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ist stetig in allen Punkten $a \in \mathbb{Z}$.

2° Sei $a \in D$ mit der Eigenschaft: Es gibt $r > 0$, so dass $U_r(a) \cap D = \{a\}$. Dann ist jede Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in a stetig.

3° Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x < 0$ und $f(x) = 1$ für $x \geq 0$ ist nicht stetig in 0; sie ist in allen anderen Punkten $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ stetig.

4° Sei $f(x) := x - [x]$, $x \in \mathbb{R}$. f ist in allen Punkten $a \in \mathbb{Z}$ nicht stetig, ansonsten stetig.

5° Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ist in allen Punkten $a \in \mathbb{R}$ unstetig. Die Restriktion $f|_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ist stetig (weil konstant: $f|_{\mathbb{Q}} = 1$).

(13.8) Satz: (ε-δ-Formulierung der Stetigkeit) *Für eine Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *und einen Punkt* $a \in D$ *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1° f *ist stetig in* a.

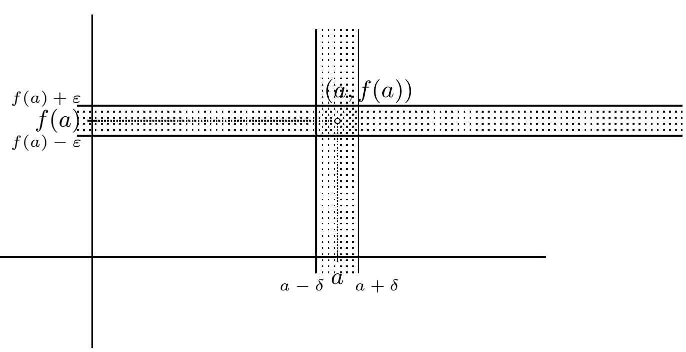
2° *Es gibt ein* $r > 0$*, so dass die Restriktion* $f|_{U_r(a)\cap D} : U_r(a) \cap D \to \mathbb{R}$ *in* a *stetig ist.*

2• *Für alle* $r > 0$ *ist die Restriktion* $f|_{U_r(a)\cap D} : U_r(a) \cap D \to \mathbb{R}$ *stetig in* a.

3° $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in D : |a - x| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

4° $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : f(U_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(a))$. [22.12.06]

(Beachte: $U_\delta(a) =]\, a - \delta, a + \delta [$, $U_\varepsilon(f(a)) =]\, f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon [$)



Das Bild soll die folgende Aussage zur Stetigkeit veranschaulichen: Wenn f in a stetig ist, findet man zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ stets ein $\delta > 0$, so dass der auf $U_\delta(a)$ bezogene Graph $\{(x, f(x)) \mid x \in U_\delta(a) \cap D\}$ von f ganz in dem Rechteck $]\, a - \delta, a + \delta\, [\times]\, f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon\, [$ enthalten ist.

(13.9) Definition: $f : D \to \mathbb{R}$ sei auf einer Menge D definiert, und $b \in \mathbb{R}$ habe die Eigenschaft: $\forall r > 0 : U_r(b) \cap D \neq \emptyset$. Dann hat definitionsgemäß f den *Grenzwert* C *bei* b (oder für $x \to b$), wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ gilt:

$$|x - b| < \delta \implies |f(x) - C| < \varepsilon\,.$$

Notation:

$$C = \lim_{x \to b} f(x) \ \text{ oder genauer } \ C = \lim_{x \to b, x \in D} f(x)\,.$$

(13.10) Satz: *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$: Dann ist f genau dann in a stetig, wenn $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ gilt. Ausführlich:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = C \ \text{ und } \ C = f(a).$$

(13.11) Bemerkung: $C = \lim_{x \to b} f(x) \iff$ Für jede Folge (x_n), $x_n \in D$, mit $x_n \longrightarrow b$ gilt $f(x_n) \longrightarrow C$.

(13.12) Bemerkung: Für $D = \,]\,a, b\,[$ gilt $b \notin D$, aber die Voraussetzung $\forall\, r > 0 : U_r(b) \cap D \neq \emptyset$ ist erfüllt.

(13.13) Definition: Für eine Teilmenge $D \in \mathbb{R}$ heißt $b \in \mathbb{R}$ ein *Berührpunkt von* D, wenn $\forall\, r > 0 : U_r(b) \cap D \neq \emptyset\,$.

Die Menge der Berührpunkte von D heißt die *abgeschlossen Hülle von* D und wird mit $\overline{D}$ bezeichnet.

Ein Berührpunkt b von D heißt *Häufungspunkt von* D, wenn $\forall\, r > 0 : (U_r(b) \backslash \{0\}) \cap D \neq \emptyset\,$.

(13.14) Lemma:

1° *Ein Punkt $b \in D$ ist immer Berührpunkt von D, also $D \subset \overline{D}$, während nicht jeder Punkt $b \in D$ auch ein Häufungspunkt sein muss. Beispiel: $D = \{0\}$ oder allgemeiner wie in 13.7.2°.*

2° *Die abgeschlossene Hülle $A := \overline{D}$ ist abgeschlossen in folgendem Sinne: Für jede konvergente Folge (x_n) mit $x_n \in A$ gilt $\lim x_n \in A$,* und A ist die kleinste Menge mit dieser Eigenschaft, die D enthält.

Das ist der Beginn der Topologie!

Eine natürliche Frage zum Schluss des Paragraphen: Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Hat f eine stetige Fortsetzung nach $\overline{D}$? Das heißt: Gibt es eine Funktion $\overline{f} : \overline{D} \to \mathbb{R}$ mit $\overline{f}|_D = f$, die stetig ist?

Diese Frage ist gleichbedeutend damit, ob für $b \in \overline{D} \backslash D$ stets der Grenzwert $\lim_{x \to b} f(x)$ existiert. Wenn das der Fall ist, so ist $\overline{f}(b) := \lim_{x \to b} f(x)$ stetige Fortsetzung. Daran sieht man: Eine stetige Fortsetzung ist – im Falle der Existenz – eindeutig bestimmt.

(13.15) Beispiele:

1° $f :]\,0, 1] \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = x$ hat eine stetige Fortsetzung $\overline{f}$ nach $\overline{]\,0, 1]} = [0, 1]$ mit $\overline{f}(0) := 0$.

2° $f :]\,0, 1] \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = x^{-1}$ hat keine stetige Fortsetzung $\overline{f}$ nach $\overline{]\,0, 1]} = [0, 1]$, denn für $x_n := \frac{1}{n} \to 0$ ist $f(x_n) = n$ keine in $\mathbb{R}$ konvergente Folge.

3° $f : [0, 1[\to \mathbb{R}\,,\ f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ hat eine stetige Fortsetzung $\overline{f}$ nach $\overline{[0, 1[} = [0, 1]$ mit $\overline{f}(1) := 2$.

4° $f\ :\,]\,0,1] \to \mathbb{R}\,,\, f(x) = x^{-1}\sin x$ hat stetige Fortsetzung $\overline{f}$ nach $\overline{]\,0,1]} = [0,1]$ mit $\overline{f}(0) := 0$.

§14 Lipschitzbedingung und Stetigkeit

(14.1) Definition: $f : D \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion.

1° f heißt *lipschitzstetig* (*erfüllt eine Lipschitzbedingung*), wenn es eine Konstante $L > 0$ (die *Lipschitzkonstante*) gibt, so dass für alle $x, y \in D$:

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|\ .$$

2° f heißt *lokal lipschitzstetig*, wenn es zu jedem Punkt $a \in D$ ein $r > 0$ gibt, so dass die Restriktion $f|_{U_r(a)\cap D}$ lipschitzstetig ist.

(14.2) Bemerkungen und Beispiele:

1° Lipschitzstetige Funktionen sind stetig

2° Lokal lipschitzstetige Funktionen ebenfalls sind stetig.

3° $f(x) = x$ und $g(x) = |x|$ sind lipschitzstetige Funktionen.

4° $f(x) = x^2$ ist nicht lipschitzstetig (auf ganz $\mathbb{R}$), aber lokal lipschitzstetig.

5° $f(x) = \sqrt{|x|}\,,\ x \in \mathbb{R}\,,$ ist stetig, aber nicht lokal lipschitzstetig.

(14.3) Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,\delta > 0\,\forall\,x, y \in D : |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,.$$

(14.4) Satz: *Jede lipschitzstetige Funktion ist in ihrem Definitionsbereich gleichmäßig stetig.*

(14.5) Satz: *$f = \sum a_n T^n$ sei konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho_f > 0$. Dann ist für $0 < r < \rho_f$ die durch f gegebene Funktion*

$$x \mapsto \hat{f}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\ ,\ |x| \leq r\ ,$$

lipschitzstetig auf $[-r, r]$. Insbesondere ist $\hat{f}$ stetig auf $]-\rho_f, \rho_f[$ und wird auch mit f bezeichnet.

(14.6) Identitätssatz:

§15 Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen

(15.1) Zwischenwertsatz: