Version 1.12. November 2006

MIA – Analysis einer reellen Veränderlichen – WS 06/07

Kurzfassung
Martin Schottenloher

$\infty\,\infty\,\infty$

Kapitel III. Folgen und Reihen in $\mathbb{R}$

Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist jetzt festgelegt durch die Axiome in Kapitel II. Die wichtigen Grundlagenfragen nach

1° Eindeutigkeit des Modells (ist gegeben, vgl. Satz 6.6)
2° Existenz (ist ungeklärt, Existenzbeweise sind nicht konstruktiv)
3° Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems der reellen Zahlen (es lässt sich beweisen, dass es keinen elementaren Widerspruchsfreiheitsbeweis gibt)
4° Redundanz des Axiomensystems der reellen Zahlen (ist gegeben, z.B. lassen sich M.1 – M.4, D, O.4 aus den restlichen Axiomen herleiten)

sind nicht Gegenstand dieser Vorlesung und werden daher nicht weiter verfolgt.

Das Thema der Vorlesung ist stattdessen das Studium von Funktionen

$$f : U \to \mathbb{R}$$

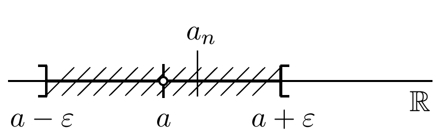
auf Intervallen U oder auf anderen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}$ in Bezug auf kleine Änderungen des Arguments $x \in U$: Also werden $f(x)$ und $f(x+h)$ für kleine h verglichen, insbesondere für den Grenzübergang $h \longrightarrow 0$.

Dazu benötigen wir zunächst den Begriff der Konvergenz von reellen Zahlenfolgen und Zahlenreihen.

§7 Grenzwert von Folgen reeller Zahlen

Bezeichnung: $\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq m\}$ für $m \in \mathbb{Z}$. $\mathbb{N}_m$ ist ein System natürlicher Zahlen, vgl. §6, und wird zur Indizierung von Folgen verwendet. $\mathbb{N}_m$ wurde in §1 bereits eingeführt für natürliche Zahlen $m \in \mathbb{N}$.

(7.1) Definition: Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \geq m}$ ***konvergiert gegen*** $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $k \in \mathbb{N}_{n_0}$ gilt: $a_k \in \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\,$.



Sprechweisen: a heißt dann der *Grenzwert* (oder der *Limes*) von (a_n). In Zeichen: $a_n \longrightarrow a$ für $n \longrightarrow \infty$ oder $a = \lim_{n\to\infty} a_n$; auch kurz: $a_n \longrightarrow a$ oder $a = \lim a_n$. Die Folge (a_n) heißt *konvergent*, wenn es $a \in \mathbb{R}$ mit $a = \lim a_n$ gibt; andernfalls heißt (a_n) *divergent*. Eine Folge (a_n), die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*.

Weil $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnet ist, gilt unmittelber:

(7.2) Führungsbeispiel: Die Folge $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ konvergiert gegen 0.

(7.3) Definition: (*Betragsfunktion*) $|x| := \max\{x, -x\}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Für das Umgebungsintervall gilt: $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\, = \{x \in \mathbb{R} \;:\; |x-a| < \varepsilon\}$.

(7.4) Folgerung: $a = \lim a_n \iff \lim |a_n - a| = 0$

(7.5) Satz: *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt:*

1° $0 \leq |x|$ und $(0 = |x| \iff x = 0)$,

2° $|x+y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung*)

3° $|xy| = |x|\,|y|$

(7.6) Beispiele:

1° $\lim \frac{1}{n} = 0$ (vgl. 7.2).

2° $a_n := a$ (konstante Folge). Dann: $a_n \longrightarrow a$.

3° $((-1)^n)$ divergiert.

4° $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

5° $\lim \frac{n}{n+1} = 1$.

6° (n) divergiert (aus ganz anderen Gründen als 3°: (n) ist nicht bechränkt).

(7.7) Satz: *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ *eine konvergente reelle Zahlenfolge. Dann:*

1° (a_n) *ist beschränkt, d.h. die Menge* $\{a_n \mid n \geq m\}$ *ist eine beschränkte Teilmenge von* $\mathbb{R}$.

2° $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ *ist eindeutig bestimmt.*

3° *Wird die Folge* (a_n) *an endlich vielen Stellen (Indizes)* $n \geq m$ *zu einer Folge* (a'_k) *verändert, so konvergiert* (a'_k) *mit* $\lim a'_k = \lim a_n$ (vgl. 7.9.5°).

4° *Ist* $\sigma : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_m$ *eine Bijektion, so ist auch die Folge* $(b_j)_{j\in\mathbb{N}_k}$, *definiert durch* $b_j := a_{\sigma(j)}$, *konvergent mit demselben Grenzwert* $\lim b_j = \lim a_n$.

Fortsetzung der Beispielliste 7.6:

7° $\lim \frac{2n+1}{n} = 2$.

8° $\lim \frac{n^2+4n}{n^3+6n} = 0$.

9° $\lim(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) = 0$.

10° $\lim(\sqrt{k})^{-1} = 0$.

[21.11.06]

(7.8) Satz: *Sei $q \in \mathbb{R}$. Für die Folge (q^n) gilt:*

1° $\lim q^n = 0$*, falls* $|q| < 1$.

2° $\lim q^n = 1$*, falls* $q = 1$.

3° (q^n) *divergiert für* $q \in \mathbb{R} \setminus]-1, 1]$.

4° *Für* $|q| < 1$ *konvergiert die* geometrische Reihe

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{q^k} = \frac{1}{1-q} \ ,$$

ansonsten liegt Divergenz vor.

5° *Für* $q > 0$ *gilt* $\lim \sqrt[n]{q} = 1$.

(7.9) Rechnen mit Grenzwerten: Es seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$. Dann:

1° $a_n + b_n \longrightarrow a + b$.

2° $ca_n \longrightarrow ca$.

3° $a_n b_n \longrightarrow ab$.

4° $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$.

5° $a = b$ (also $\lim a_n = \lim b_n$) $\iff a_n - b_n \longrightarrow 0$.

6° $\forall\, n \in \mathbb{N}_m : a_n \leq b_n \implies a \leq b$.

7° Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall I, die dort eine *Lipschitzbedingung* erfüllt, d.h. zu der es $L > 0$ gibt mit: $\forall\, x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$.

Gilt dann $a_n, a \in I$, so folgt $\lim f(a_n) = f(a)$, also $\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$.

[[Einschub[1]: Beweis zu 4°. Es genügt, den Fall $a_n = 1$ zu behandeln, weil man 3° anwenden kann. Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Gesucht ist n_0 mit

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b_n - b}{b_n b} \right| < \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{n_0}$. Zu $\varepsilon' = \frac{1}{2}\,|b|$ findet man zunächst $n' \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \varepsilon'$ für $n \in \mathbb{N}_{n'}$, also $|b_n| \geq \frac{1}{2}\,|b| > 0$, dh. $\frac{1}{|b_n|} \leq \frac{2}{|b|}$ und daher $\frac{1}{|b_n b|} \leq 2 \frac{1}{|b|}^2 =: M$. Zu dem vorher gegegeben ε gibt es jetzt ein $n_0 \geq n'$, so dass für alle $n \in N_{n_0}$ bereits $|b_n - b| < M\varepsilon$ gilt. Es folgt

$$\left| \frac{b_n - b}{b_n b} \right| \leq M\,|b_n - b| < \varepsilon\ .]]$$

Beispiele:

Aus $a_n \longrightarrow a$ folgt $|a_n| \longrightarrow |a|$.

Aus $a_n \longrightarrow a$ für $a_n > 0, a > 0$ folgt $a_n^k \longrightarrow a^k$.

(7.10) Definition: Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \geq m}$ heißt *monoton*, wenn sie monoton fallend oder monoton wachsend (man sagt auch: monoton steigend) ist. Dabei heißt sie *monoton fallend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}_m$ gilt: $a_n \geq a_{n+1}$, und sie heißt *monoton wachsend*, wenn $(-a_n)$ monoton fallend ist, wenn also für alle $n \in \mathbb{N}_m$ gilt: $a_n \leq a_{n+1}$.

[1] nicht in der Vorlesung vorgetragen

(7.11) Monotoniekriterium: *Eine monotone Folge reeller Zahlen ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist. Ist (a_n) monoton wachsend und beschränkt, so gilt*

$$\lim a_n = \sup a_n$$

und für monoton fallende Folgen analog.

(7.12) Anwendungen: Wichtige Anwendungen von 7.9 und 7.11 sind:

(7.12.1°) Wachstumsvergleich: Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{n!} = 0 \,.$$

(7.12.2°) Die Eulersche Zahl e:

$$e := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

Es gilt für alle $n \in N$ die Abschätzung

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{2}{(n+1)!}$$

[28.11.06]

(7.12.3°) Quadratwurzel: Sei $a > 0$. Zu $x_0 > 0$ (beliebig !) setze

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \ , \ n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $(x_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend und konvergiert gegen $\sqrt{a}$. Der Fehler $\Delta_n := x_n - \sqrt{a}$ erfüllt

$$\Delta_{n+1} \leq \frac{1}{2} \min\{\Delta_n \,,\, \frac{\Delta_n^2}{\sqrt{a}}\} \,.$$

[[Einschub[2]: Die Fehlerabschätzung folgt aus der Abschätzung

$$\Delta_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n^2 + a}{x_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n^2 - 2\sqrt{a} + (\sqrt{a})^2}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Delta_n^2}{x_n} \leq \frac{1}{2}\frac{\Delta_n^2}{\sqrt{a}}$$

für $n \in \mathbb{N}_1$.]]

(7.12.4°) Die Zahl π: (Exhaustion nach Archimedes) Der elementargeometrische Ansatz zur Bestimmung des Inhalts F und des Umfangs U der Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ verwendet gleichmäßige 2^{n+1}-Ecke v_n, $v_n \subset \mathbb{E}$, und V_n, $\mathbb{E} \subset V_n$, die maximal bzw. minimal bezüglich dieser Inklusionen sind. Das bedeutet, dass die Ecken von v_n auf dem Rand $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ von $\mathbb{E}$ liegen, und dass die Kanten von V_n die Kreislinie B in jeweils genau einem Punkte berühren. Die Idee ist jetzt, den Umfang (und auch den Inhalt) von $\mathbb{E}$ jeweils mit dem von v_n und V_n zu vergleichen, und durch Grenzübergang $n \longrightarrow \infty$ zu einer heuristisch begründeten Zahl ($= \pi$) zu kommen.

Das regelmäßige 2^{n+1}-Eck v_n setzt sich zusammen aus 2^{n+1} Streckenzügen der Länge s_n; entsprechend besteht V_n aus 2^{n+1} Streckenzügen der Länge S_n. Der halbe Umfang von v_n ist

[2] nicht vorgetragen in der Vorlesung

$2^n s_n$ und der halbe Umfang von V_n ist $2^n S_n$. Der halbe Umfang der Einheitskreisscheibe liegt (im Falle der Existenz) zwischen diesen beiden Größen:

$$2^n s_n \le \frac{1}{2} U \le 2^n S_n\,.$$

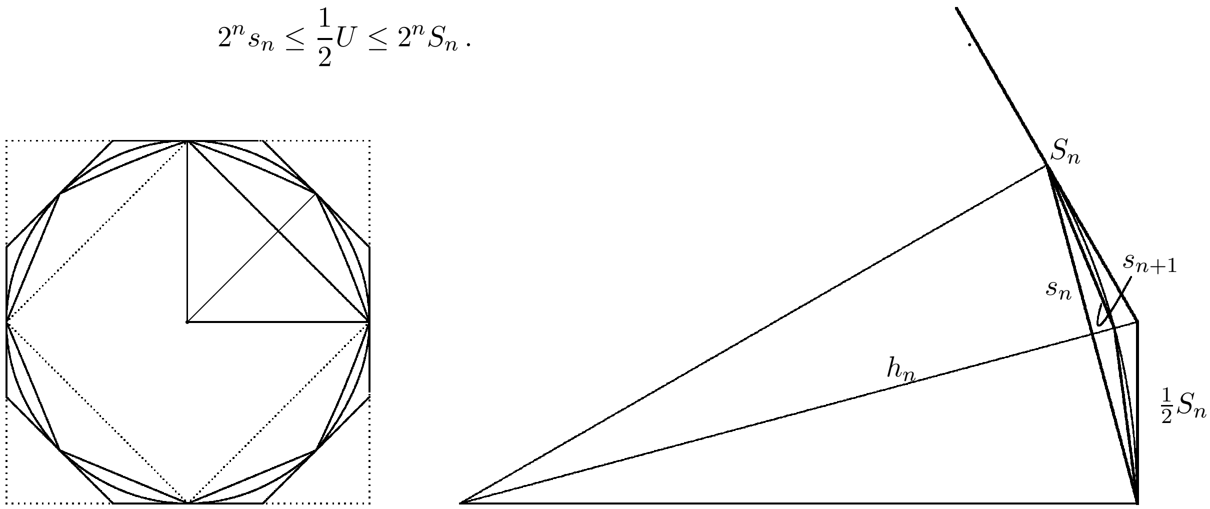


Abb.: Links: Die Quadrate V_1 , v_1 (gestrichelt) und die regelmäßigen Achtecke V_2 , v_2
Rechts: Beziehungen zwischen s_n, s_{n+1} und S_n in den regelmäßigen 2^{n+1}-Ecken V_n , v_n

Elementargeometrische Überlegungen zeigen $h_n^2 + \frac{1}{4}s_n^2 = 1$ sowie $(1-h_n)^2 + \frac{1}{4}s_n^2 = s_{n+1}^2$, und $S_n = \frac{s_n}{h_n}$. Damit gilt:

$$s_1 = \sqrt{2}\ ,\ s_{n+1} = \sqrt{2-\sqrt{4-s_n^2}} \ \text{ und } \ S_n = \frac{2s_n}{2-s_{n+1}^2}\,.$$

Die Folge $(2^n s_n)$ erweist sich als monoton wachsend , $(2^n S_n)$ als monoton fallend und es gilt $s_n \le S_n$. Also sind die Folgen $(2^n s_n)$ und $(2^n S_n)$ monoton und beschränkt und daher nach dem Monotoniekriterium konvergent. Die Grenzwerte stimmen überein, weil die Differenzfolge

$$2^n S_n - 2^n s_n = 2^n \frac{s_{n+1}^2 s_n}{2-s_{n+1}^2} = 2^n s_n \frac{s_{n+1}^2}{2-s_{n+1}^2} = 2^n s_n \frac{1}{2^{(n+1)2}} \frac{(2^{n+1}s_{n+1})^2}{2-(2^{n+1}s_{n+1})^2}$$

eine Nullfolge ist (mehrfache Anweundung von 7.9). Dieser gemeinsame Grenzwert repräsentiert die Länge des halben Umfangs von $\mathbb{E}$. Wir setzen:

$$\pi := \lim_{n\to\infty} 2^n s_n = \lim_{n\to\infty} 2^n S_n$$

Es gilt also $U = 2\pi$ und π ist zugleich der elementargeometrische Inhalt F von $\mathbb{E}$. Insbesondere wird mit dieser elementargeometrischen Argumentation die Existenz der Länge des Umfangs von $\mathbb{E}$ als 2π gut begründet.

Bemerkung: Der Begriff der Länge von Kurven, wie hier von der durch den Halbkreisbogen gegebenen Kurve, wird erst im kommenden Semester mit Hilfe der Integralrechnung eingeführt. Es bestätigt sich dann, dass die hier definierte Zahl π tatsächlich die Länge des Halbkreisbogens des Einheitskreises ist. Analoges gilt für π als Flächeninhalt von $\mathbb{E}$, der für allgemeine Bereiche $B \subset \mathbb{R}^2$ ebenfalls mit Hilfe der Integralrechnung eingeführt wird.

(7.12.5°) g**-adische Entwicklung:** Sei $g \in \mathbb{N}_2$. Zu jeder Zahl $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, setze $z_0 := [x]$ $z_n := [g^n x] - g[g^{n-1}x]$, $n \in \mathbb{N}_1$. Es ist $z_k \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$ für $k \in \mathbb{N}_1$ und es gilt

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z_k g^{-k} = z_0, z_1 z_2 z_3 \ldots z_n \ldots\,.$$

Im Falle $g = 10$ hat man die bekannte Dezimalbruchentwicklung, im Falle $g = 2$ die in der Informatik wichtige dyadische Entwicklung.

Die Babylonier haben mit $g = 60$ gerechnet. $[1.12.06]_{\uparrow}$

§8 Cauchyfolgen und Vollständigkeit $[24.11.06]_{\downarrow}$

(8.1) Definition: Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\geq m}$ heißt *Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n, m \geq n_0$ stets $|a_n - a_m| < \varepsilon$ gilt.

Offensichtlich ist jede konvergente Folge eine Cauchyfolge.

(8.2) Satz: (Cauchy-Kriterium) *Jede reelle Cauchyfolge ist in $\mathbb{R}$ konvergent.*

(8.3) Anwendung: Sei $g \in \mathbb{N}_2$. Für jede beliebige Folge von Ziffern $(z_k)_{k\in\mathbb{N}_1}$ aus $Z(g) := \{z \in \mathbb{N} \mid 0 \leq z \leq g-1\}$, also $(z_k) \in Z(g)^{\mathbb{N}_1}$, ist die Folge der Summen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} z_k g^{-k} \;=\; 0, z_1 z_2 z_3 \ldots z_n$$

konvergent mit Grenzwert in $[0,1]$.

(8.4) Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ eine reelle Zahlenfolge.

1° $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungswert* (oder auch *Häufungspunkt*) von (a_n), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $k \in N_m$ ein $n \in \mathbb{N}_k$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ gibt, wenn also die Umgebung $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ unendlich viele Glieder der Folge enthält. Mit $H(a_n)$ wird die Menge der Häufungswerte von (a_n) bezeichnet.

2° Eine *Teilfolge* von (a_n) ist eine Folge der Form $(a_{n_j})_{j\in N_k}$ mit $n_j < n_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}_k$. Eine Teilfolge wird also beschrieben durch eine Abbildung $n : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_m$, $n(j) = n_j$, die ordnungstreu ist, dh. $\forall\, i, j \in N_k : i < j \Longrightarrow n(i) < n(j)$.

(8.5) Beispiele:

1° $((-1)^n)$ hat die Häufungswerte 1 und -1. Teilfolgen sind z.B. die konstanten Folgen $((-1)^{2n})$, $((-1)^{2n+1})$.

2° (n) hat keinen Häufungwert in $\mathbb{R}$, und jede aufsteigende Folge (n_j) von Zahlen aus $\mathbb{N}$ ist eine Teilfolge von (n). Man ist geneigt, ∞ als verallgemeinerten Häufungswert (oder gar Grenzwert) der Folge (n) zu verstehen (s.u.).

3° Der Limes einer konvergenten Folge ist Häufungswert und einziger Häufungswert.

4° Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist (Cantorsches Diagonalverfahren), lässt sich $\mathbb{Q}$ als Bild einer Folge (r_n) schreiben: $\{r_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$, und es folgt, dass jede reelle Zahl Häufungswert von (r_n) ist. Das gilt, weil nach 6.11 jedes nichtleere Intervall I der Durchschnitt $\mathbb{Q} \cap I$ unendlich viele Elemente hat.

5° Ähnliches aber konkreter: Die Folge

$$a_n := \frac{j}{k+1} \quad \text{für} \quad n = k^2 + j\,,\ j = 1, 2, \ldots, 2k+1\,,\ k \in \mathbb{N}$$

hat die merkwürdige Eigenschaft, das jede rationale Zahl im Intervall $[0, 2[$ unendlich oft vorkommt. Es gilt daher $H(a_n) = [0, 2[$ mit 0 als kleinstem und 2 als größtem Häufungswert.

(8.6) Lemma: $a \in \mathbb{R}$ *ist Häufungswert von* (a_n) $\iff$ $\exists$ *eine Teilfolge* (a_{n_j}) *von* (a_n) *mit* $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = a$ *.*

(8.7) Satz: (Bolzano-Weierstrass) *Jede beschränkte Folge aus* $\mathbb{R}$ *hat einen Häufungswert in* $\mathbb{R}$*. Ebenso: Jede beschränkte Folge aus* $\mathbb{R}$ *hat eine konvergente Teilfolge.* $[24.11.06]^{\uparrow}$ $[1.12.06]_{\downarrow}$

(8.8) Definition: (Limes superior, limes inferior) Sei $H(a_n)$ die Menge der Häufungswerte einer reellen Zahlenfolge (a_n). Setze

- $\limsup\,(a_n) := \sup H(a_n)$
- $\liminf\,(a_n) := \inf H(a_n)$

Vorsicht: Die Schreibweise macht keine Aussage über die Existenz. Beispielsweise hat die Folge (2^n) keinen limes superior in $\mathbb{R}$.

Ist (a_n) beschränkt, so auch $H(a_n)$ und die Existenz von $\limsup\,(a_n)$ und $\liminf\,(a_n)$ ist gesichert. $[1.12.06]^{\uparrow}$ $[5.12.06]_{\downarrow}$

(8.9) Folgerung: Für eine beschränkte Folge (a_n) existieren $\limsup\,(a_n)$ und $\liminf\,(a_n)$ als größter bzw. kleinster Häufungswert. Also gilt: $\limsup\,(a_n) := \max H(a_n)\,,\ \liminf\,(a_n) := \min H(a_n)\,.$

(8.10) Lemma: Für eine beschränkte Folge sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1° (a_n) konvergiert.
2° $H(a_n)$ ist einpunktig.
3° $\limsup a_n = \liminf a_n$

(8.11) Bemerkung: *Im Falle einer konvergenten Folge* (a_n) *gilt:*

$$\lim_{k\to\infty}(\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_k\}) = \limsup\ a_n = \lim a_n = \liminf\ a_n = \lim_{k\to\infty}(\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_k\})\,.$$

(8.12) Definition: (Die erweiterte Zahlengerade) Wir setzen $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ als die *erweiterte Zahlengerade* mit der *Anordnung* (per definitionem):

$-\infty < \infty$ und $\forall\, a \in \mathbb{R} : -\infty < a$ und $\forall\, a \in \mathbb{R} : a < \infty$.

Wir haben dann *Intervalle* in $\overline{\mathbb{R}}$, die als Intervallgrenzen auch ∞ oder $-\infty$ haben können. Als *Umgebungsintervall* von ∞ gilt jedes Intervall $[c, \infty]$ oder $]c, \infty]$ mit $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Analog für $-\infty$.

Eine Folge (a_n) aus $\mathbb{R}$ oder auch aus $\overline{\mathbb{R}}$ hat ∞ als *Häufungswert in* $\overline{\mathbb{R}}$, wenn in jedem Umgebungsintervall $[c, \infty]$, $c \in \mathbb{R}$, unendlich viele Folgenglieder der Folge (a_n) liegen (vgl. 8.5.2°: $\lim n = \infty$). Analog für $-\infty$.

(8.13) Folgerungen: Für eine Folge (a_n) aus $\mathbb{R}$ sind die vier folgenden Aussagen zueinander äquivalent:

1° (a_n) hat ∞ als Häufungswert
2° Zu jedem $c > 0$ und jedem $n \in \mathbb{N}_m$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}_n$ mit $c < a_k$ gibt.
3° $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_m\}$ hat keine obere Schranke.
4° (a_n) hat eine Teilfolge a_{n_k} mit $k < a_{n_k}$.

Analog für $-\infty$.

(8.14) Notation: Für eine Folge (a_n) aus $\overline{\mathbb{R}}$ wird die Menge der Häufungswerte nach Definition 8.12 in der Regel wieder mit $H(a_n)$ bezeichnet, wenn das nicht zu Verwechslungen führt. Will man ausdrücklich zwischen Häufungswerten in $\mathbb{R}$ und solchen in $\overline{\mathbb{R}}$ unterscheiden, so kann man die nach 8.12 gegebene Menge der Häufungswerte mit $\overline{H}(a_n)$ bezeichnen.

Die Häufungspunkte ∞ oder $-\infty$ bezeichnet man gelegentlich als *uneigentliche Häufungspunkte*, wenn sie denn überhaupt Häufungspunkte der gegebenen Folge (a_n) sind.

Satz 8.7 in Verbindung mit der offensichtlichen Ausdehnung der Begriffe „limes superior, limes inferior" auf die erweiterte Gerade $\overline{\mathbb{R}}$ hat jetzt die folgende Verallgemeinerung:

(8.15) Satz: (Bolzano-Weierstrass) *Jede Folge aus* $\overline{\mathbb{R}}$ *hat einen Häufungspunkt in* $\overline{\mathbb{R}}$ *und die Menge der Häufungswerte von* (a_n) *in* $\overline{\mathbb{R}}$ *hat ein kleinstes Element* $\liminf a_n$ *und ein größtes Element* $\limsup a_n$.

[[Der folgende Teil wird erst noch ausgearbeitet.]]

§9 Unendliche Reihen

(9.1) Definition: Eine (unendliche) *Reihe* reeller Zahlen besteht aus zwei Folgen – der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ der *Glieder der Reihe* und die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ der *Partialsummen* –, die in folgender Beziehung zueinander stehen: Für alle $n \in \mathbb{N}_m$ gilt

$$s_n = \sum_{k=m}^{n} a_k \,.$$

Notation: $\sum a_n$ anstelle der Angabe der beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ (unter absichtlich fortgelassenen Summationsgrenzen).

Die Reihe $\sum a_n$ *konvergiert*, wenn die Folge der Partialsummen (s_n) konvergiert und der Grenzwert $\lim s_n$ ist per definitionem der *Summenwert* (oder die *Summe*) der Reihe, der in der Regel als

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} a_k$$

geschrieben wird.

Beispiele: Drei verschiedene konvergente Reihen haben wir schon kennengelernt:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k \ , \ |x| < 1$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(x) g^{-n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k(x) g^{-k} \ , \ x \in [0,1[$$

(9.2) Cauchykriterium: *Eine Reihe* $\sum a_n$ *konvergiert genau dann, wenn*

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}\forall\, m \in \mathbb{N} : \left|\sum_{k=n}^{n+m} a_k\right| < \varepsilon$$

(9.3) Folgerung: *Wenn $\sum a_j$ konvergiert, ist (a_j) eine Nullfolge.*

(9.4) Beispiel: (Harmonische Reihe) $\sum \frac{1}{n}$ divergiert.

(9.5) Leibnizkriterium: *Ist (a_n) eine monotone Nullfolge, so konvergiert die alternierende Reihe $\sum(-1)^n a_n$.*

Beispiele dazu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad (= -\log 2)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \left(= \frac{\pi}{4}\right)$$

(9.6) Satz: *Für eine Reihe mit lauter nichtnegativen Gliedern a_j gilt: $\sum a_j$ ist konvergent $\Longleftrightarrow$ die Folge der Partialsummen der Reihe ist nach oben beschränkt. Es gilt dann: $\sum_j^\infty a_j = \sup\{\sum_j^n a_j | n \in \mathbb{N}_m\}$.*

(9.7) Definition: (Absolute Konvergenz) Eine Reihe $\sum a_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum |a_n|$ konvergiert.

(9.8) Satz: *Eine absolut konvergente Reihe ist stets konvergent.*

Die Umkehrung dieser Aussage ist falsch, wie man an dem Beispiel $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n}$ sieht.

(9.9) Majorantenkriterium: Es sei $\sum c_n$ eine konvergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern $c_n \geq 0$. Gibt es zur Reihe $\sum a_n$ eine Konstante $M > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ stets

$$|a_n| \leq M c_n$$

gilt, so ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

(9.10) Minorantenkriterium: Es sei $\sum c_n$ eine divergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern $c_n \geq 0$. Gibt es zur Reihe $\sum a_n$ eine Konstante $M > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ stets

$$a_n \geq M c_n$$

gilt, so ist $\sum a_n$ nicht konvergent.

(9.11) Wurzelkriterium: $\sum a_n$ sei eine Reihe. Dann gilt:

1° $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum a_n$ konvergiert absolut.
2° $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum a_n$ divergiert.
3° Wenn es eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) gibt mit

$$(|a_{n_k}|)^{\frac{1}{n_k}} \geq 1$$

so ist die Reihe $\sum a_n$ divergent.

(9.12) Quotientenkriterium: Für jede Reihe $\sum a_n$ mit nichtverschwindenden Gliedern a_n gilt:

1° $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \implies \sum a_n$ konvergiert absolut.
2° $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \implies \sum a_n$ divergiert.

(9.13) Beispiele: Beispiele

(9.14) Verdichtungssatz:

(9.15) Definition:(Unbedingte Konvergenz)

(9.16) Satz: *Eine Reihe konvergiert genau dann absolut, wenn sie unbedingt konvergiert.*