

MIA – Analysis einer reellen Veränderlichen – WS 06/07

Kurzfassung
Martin Schottenloher

∞ ∞ ∞

Kapitel III. Folgen und Reihen in $\mathbb{R}$

Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist jetzt festgelegt durch die Axiome in Kapitel II. Die wichtigen Grundlagenfragen nach

- 1° Eindeutigkeit des Modells (ist gegeben, vgl. Satz 6.6)
- 2° Existenz (ist ungeklärt, Existenzbeweise sind nicht konstruktiv)
- 3° Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems der reellen Zahlen (es lässt sich beweisen, dass es keinen elementaren Widerspruchsfreiheitsbeweis gibt)
- 4° Redundanz des Axiomensystems der reellen Zahlen (ist gegeben, z.B. lassen sich M.1 – M.4, D, O.4 aus den restlichen Axiomen herleiten)

sind nicht Gegenstand dieser Vorlesung und werden daher nicht weiter verfolgt.

Das Thema der Vorlesung ist stattdessen das Studium von Funktionen

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

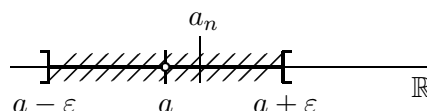
auf Intervallen U oder auf anderen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}$ in Bezug auf kleine Änderungen des Arguments $x \in U$: Also werden $f(x)$ und $f(x+h)$ für kleine h verglichen, insbesondere für den Grenzübergang $h \rightarrow 0$.

Dazu benötigen wir zunächst den Begriff der Konvergenz von reellen Zahlenfolgen und Zahlenreihen.

§7 Grenzwert von Folgen reeller Zahlen

Bezeichnung: $\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq m\}$ für $m \in \mathbb{Z}$. $\mathbb{N}_m$ ist ein System natürlicher Zahlen, vgl. §6, und wird zur Indizierung von Folgen verwendet. $\mathbb{N}_m$ wurde in §1 bereits eingeführt für natürliche Zahlen $m \in \mathbb{N}$.

(7.1) Definition: Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \geq m}$ *konvergiert gegen* $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $k \in \mathbb{N}_{n_0}$ gilt: $a_k \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.



Sprechweisen: a heißt dann der *Grenzwert* (oder der *Limes*) von (a_n) . In Zeichen: $a_n \longrightarrow a$ für $n \longrightarrow \infty$ oder $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$; auch kurz: $a_n \longrightarrow a$ oder $a = \lim a_n$. Die Folge (a_n) heißt *konvergent*, wenn es $a \in \mathbb{R}$ mit $a = \lim a_n$ gibt; andernfalls heißt (a_n) *divergent*. Eine Folge (a_n) , die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*.

Weil $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnet ist, gilt unmittelbar:

(7.2) Führungsbeispiel: Die Folge $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ konvergiert gegen 0.

(7.3) Definition: (Betragsfunktion) $|x| := \max\{x, -x\}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Für das Umgebungsintervall gilt: $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$.

(7.4) Folgerung: $a = \lim a_n \iff \lim |a_n - a| = 0$

(7.5) Satz: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

- 1° $0 \leq |x|$ und $(0 = |x| \iff x = 0)$,
- 2° $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung*)
- 3° $|xy| = |x| |y|$

(7.6) Beispiele:

- 1° $\lim \frac{1}{n} = 0$ (vgl. 7.2).
- 2° $a_n := a$ (konstante Folge). Dann: $a_n \longrightarrow a$.
- 3° $((-1)^n)$ divergiert.
- 4° $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.
- 5° $\lim \frac{n}{n+1} = 1$.
- 6° (n) divergiert (aus ganz anderen Gründen als 3°: (n) ist nicht beschränkt).

(7.7) Satz: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ eine konvergente reelle Zahlenfolge. Dann:

- 1° (a_n) ist beschränkt, d.h. die Menge $\{a_n \mid n \geq m\}$ ist eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$.
- 2° $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ist eindeutig bestimmt.
- 3° Wird die Folge (a_n) an endlich vielen Stellen (Indizes) $n \geq m$ zu einer Folge (a'_k) verändert, so konvergiert (a'_k) mit $\lim a'_k = \lim a_n$ (vgl. 7.9.5°).
- 4° Ist $\sigma : \mathbb{N}_k \rightarrow \mathbb{N}_m$ eine Bijektion, so ist auch die Folge $(b_j)_{j \in \mathbb{N}_k}$, definiert durch $b_j := a_{\sigma(j)}$, konvergent mit demselben Grenzwert $\lim b_j = \lim a_n$.

Fortsetzung der Beispielliste 7.6:

- 7° $\lim \frac{2n+1}{n} = 2$.
- 8° $\lim \frac{n^2+4n}{n^3+6n} = 0$.
- 9° $\lim(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) = 0$.
- 10° $\lim(\sqrt{k})^{-1} = 0$.

(7.8) Satz: Sei $q \in \mathbb{R}$. Für die Folge (q^n) gilt:

- 1° $\lim q^n = 0$, falls $|q| < 1$.
- 2° $\lim q^n = 1$, falls $q = 1$.
- 3° (q^n) divergiert für $q \in \mathbb{R} \setminus]-1, 1]$.
- 4° Für $|q| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{q^k} = \frac{1}{1-q},$$

ansonsten liegt Divergenz vor.

- 5° Für $q > 0$ gilt $\lim \sqrt[n]{q} = 1$.

(7.9) Rechnen mit Grenzwerten: Es seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$. Dann:

- 1° $a_n + b_n \rightarrow a + b$.
- 2° $ca_n \rightarrow ca$.
- 3° $a_n b_n \rightarrow ab$.
- 4° $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$.
- 5° $a = b$ (also $\lim a_n = \lim b_n$) $\iff a_n - b_n \rightarrow 0$.
- 6° $\forall n \in \mathbb{N}_m : a_n \leq b_n \implies a \leq b$.
- 7° Es sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall I , die dort eine *Lipschitzbedingung* erfüllt, d.h. zu der es $L > 0$ gibt mit: $\forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$.
Gilt dann $a_n, a \in I$, so folgt $\lim f(a_n) = f(a)$, also $\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$.

Beispiele:

Aus $a_n \rightarrow a$ folgt $|a_n| \rightarrow |a|$.

Aus $a_n \rightarrow a$ für $a_n > 0, a > 0$ folgt $a_n^k \rightarrow a^k$.

(7.10) Definition: Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \geq m}$ heißt *monoton*, wenn sie monoton fallend oder monoton wachsend (man sagt auch: monoton steigend) ist. Dabei heißt sie *monoton fallend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}_m$ gilt: $a_n \geq a_{n+1}$, und sie heißt *monoton wachsend*, wenn $(-a_n)$ monoton fallend ist, wenn also für alle $n \in \mathbb{N}_m$ gilt: $a_n \leq a_{n+1}$.

(7.11) Monotoniekriterium: Eine monotone Folge reeller Zahlen ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist. Ist (a_n) monoton wachsend und beschränkt, so gilt

$$\lim a_n = \sup a_n$$

und für monoton fallende Folgen analog.

(7.12) Anwendungen: Wichtige Anwendungen von 7.9 und 7.11 sind:

(7.12.1°) Wachstumsvergleich: Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n}{n!} = 0.$$

(7.12.2°) Die Eulersche Zahl e :

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{2}{(n+1)!}$$

[28.11.06]

(7.12.3°) Quadratwurzel: Sei $a > 0$. Zu $x_0 > 0$ (beliebig !) setze

$$x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $(x_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend und konvergiert gegen $\sqrt{a}$. Der Fehler $\Delta_n := x_n - \sqrt{a}$ erfüllt

$$\Delta_{n+1} \leq \frac{1}{2} \min \left\{ \Delta_n, \frac{\Delta_n^2}{\sqrt{a}} \right\}.$$

(7.12.4°) Die Zahl π : (Exhaustion nach Archimedes) Der elementargeometrische Ansatz zur Bestimmung des Inhalts F und des Umfangs U der Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ verwendet gleichmäßige 2^{n+1} -Ecke v_n , $v_n \subset \mathbb{E}$ und V_n , $\mathbb{E} \subset V_n$, deren Ecken auf dem Rand $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ von $\mathbb{E}$ liegen. Die Idee ist jetzt, den Umfang (und auch den Inhalt) von $\mathbb{E}$ mit dem von v_n und V_n zu vergleichen, und durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ zu einer heuristisch begründeten Zahl (= π) zu kommen.

Das regelmäßige 2^{n+1} -Eck v_n setzt sich zusammen aus 2^{n+1} Streckenzügen der Länge s_n ; entsprechend besteht V_n aus 2^{n+1} Streckenzügen der Länge S_n . Der halbe Umfang von v_n ist $2^n s_n$ und der halbe Umfang von V_n ist $2^n S_n$. Der halbe Umfang der Einheitskreisscheibe liegt (im Falle der Existenz) zwischen diesen beiden Größen:

$$2^n s_n \leq \frac{1}{2} U \leq 2^n S_n.$$

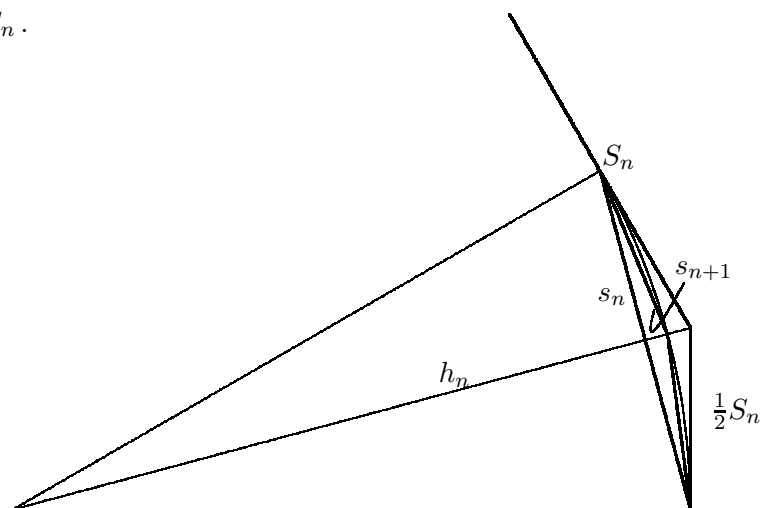
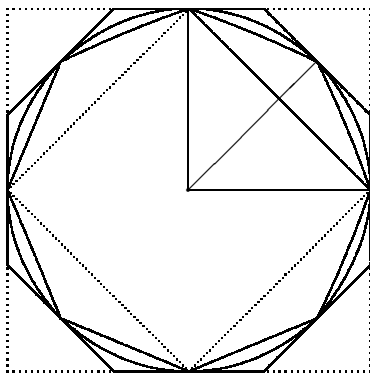


Abb.: Links: Die Quadrate V_1 , v_1 (gestrichelt) und die regelmäßigen Achtecke V_2 , v_2
 Rechts: Beziehungen zwischen s_n , s_{n+1} und S_n in den regelmäßigen 2^{n+1} -Ecken V_n , v_n

Elementargeometrische Vergleiche zeigen $h_n^2 + \frac{1}{4}s_n^2 = 1$ und $(1 - h_n)^2 + \frac{1}{4}s_n^2 = s_{n+1}^2$. Damit gilt:

$$s_1 = \sqrt{2}, s_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \text{ und } S_n = \frac{s_n}{h_n} = \frac{2s_n}{2 - s_{n+1}^2}.$$

Die Folge $(2^n s_n)$ erweist sich als monoton wachsend, $(2^n S_n)$ als monoton fallend und es gilt $s_n \leq S_n$. Also sind die Folgen $(2^n s_n)$ und $(2^n S_n)$ monoton und beschränkt und daher nach dem Monotoniekriterium konvergent. Die Grenzwerte stimmen überein, weil die Differenzfolge

$$2^n S_n - 2^n s_n = 2^n \frac{s_{n+1}^2 s_n}{2 - s_{n+1}^2} = 2^n s_n \frac{s_{n+1}^2}{2 - s_{n+1}^2}$$

eine Nullfolge ist. Dieser gemeinsame Grenzwert repräsentiert die Länge des halben Umfangs von $\mathbb{E}$. Wir setzen:

$$\pi := \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n S_n$$

Es gilt also $U = 2\pi$ und π ist zugleich der elementargeometrische Inhalt F von $\mathbb{E}$. Insbesondere wird mit dieser elementargeometrischen Argumentation die Existenz der Länge des Umfangs von $\mathbb{E}$ als 2π gut begründet.

Bemerkung: Der Begriff der Länge von Kurven, wie hier von der durch den Halbkreisbogen gegebenen Kurve, wird erst im kommenden Semester mit Hilfe der Integralrechnung eingeführt. Es bestätigt sich dann, dass die hier definierte Zahl π tatsächlich die Länge des Halbkreisbogens des Einheitskreises ist. Analoges gilt für π als Flächeninhalt von $\mathbb{E}$, der für allgemeine Bereiche $B \subset \mathbb{R}^2$ ebenfalls mit Hilfe der Integralrechnung eingeführt wird.

(7.12.5°) g -adische Entwicklung: Sei $g \in \mathbb{N}_2$. Zu jeder Zahl $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, setze $z_0 := [x]$ $z_n := [g^n x] - g[g^{n-1} x]$, $n \in \mathbb{N}_1$. Es ist $z_k \in \{0, 1, \dots, g-1\}$ güt $k \in \mathbb{N}_1$ und es gilt

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n z_k g^{-k} = z_0, z_1 z_2 z_3 \dots z_n \dots$$

Im Falle $g = 10$ hat man die bekannte Dezimalbruchentwicklung, im Falle $g = 2$ die in der Informatik wichtige dyadische Entwicklung.

Die Babylonier haben mit $g = 60$ gerechnet.

[1.12.06]_↑

§8 Cauchyfolgen und Vollständigkeit

[24.11.06]_↓

(8.1) Definition: Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \geq m}$ heißt *Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n, m \geq n_0$ stets $|a_n - a_m| < \varepsilon$ gilt.

Offensichtlich ist jede konvergente Folge eine Cauchyfolge.

(8.2) Satz: (Cauchy-Kriterium) *Jede reelle Cauchyfolge ist in $\mathbb{R}$ konvergent.*

(8.3) Anwendung: Sei $g \in \mathbb{N}_2$. Für jede beliebige Folge von Ziffern $(z_k)_{k \in \mathbb{N}_1}$ aus $Z(g) := \{z \in \mathbb{N} \mid 0 \leq z \leq g-1\}$, also $(z_k) \in Z(g)^{\mathbb{N}_1}$, ist die Folge der Summen

$$s_n := \sum_{k=1}^n z_k g^{-k} = 0, z_1 z_2 z_3 \dots z_n$$

konvergent mit Grenzwert in $[0, 1]$.

(8.4) Definition: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ eine reelle Zahlenfolge.

1° $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungswert* (oder auch *Häufungspunkt*) von (a_n) , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $k \in \mathbb{N}_m$ ein $n \in \mathbb{N}_k$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ gibt, wenn also die Umgebung $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ unendlich viele Glieder der Folge enthält. Mit $H(a_n)$ wird die Menge der Häufungswerte von (a_n) bezeichnet.

2° Eine *Teilfolge* von (a_n) ist eine Folge der Form $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}_k}$ mit $n_j < n_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}_k$. Eine Teilfolge wird also beschrieben durch eine Abbildung $n : \mathbb{N}_k \rightarrow \mathbb{N}_m$, $n(j) = n_j$, die ordnungstreu ist, dh. $\forall i, j \in \mathbb{N}_k : i < j \implies n(i) < n(j)$.

(8.5) Beispiele:

1° $((-1)^n)$ hat die Häufungswerte 1 und -1 . Teilfolgen sind z.B. die konstanten Folgen $((-1)^{2n})$, $((-1)^{2n+1})$.

2° (n) hat keinen Häufungswert in $\mathbb{R}$, und jede aufsteigende Folge (n_j) von Zahlen aus $\mathbb{N}$ ist eine Teilfolge von (n) . Man ist geneigt, ∞ als verallgemeinerten Häufungswert (oder gar Grenzwert) der Folge (n) zu verstehen (s.u.).

3° Der Limes einer konvergenten Folge ist Häufungswert und einziger Häufungswert.

4° Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist (Cantorsches Diagonalverfahren), lässt sich $\mathbb{Q}$ als Bild einer Folge (r_n) schreiben: $\{r_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$, und es folgt, dass jede reelle Zahl Häufungswert von (r_n) ist. Das gilt, weil nach 6.11 jedes nichtleere Intervall I den Durchschnitt $\mathbb{Q} \cap I$ unendlich viele Elemente hat.

5° Ähnliches aber konkreter: Die Folge

$$a_n := \frac{j}{k+1} \quad \text{für } n = k^2 + j, j = 1, 2, \dots, 2k+1, k \in \mathbb{N}$$

hat die merkwürdige Eigenschaft, dass jede rationale Zahl im Intervall $[0, 2[$ unendlich oft vorkommt. Es gilt daher $H(a_n) = [0, 2[$ mit 0 als kleinstem und 2 als größtem Häufungswert.

(8.6) Lemma: $a \in \mathbb{R}$ ist Häufungswert von $(a_n) \iff \exists$ eine Teilfolge (a_{n_j}) von (a_n) mit $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} = a$.

(8.7) Satz: (Bolzano-Weierstrass) Jede beschränkte Folge aus $\mathbb{R}$ hat einen Häufungswert in $\mathbb{R}$. Ebenso: Jede beschränkte Folge aus $\mathbb{R}$ hat eine konvergente Teilfolge. [24.11.06][†] [1.12.06]_↓

(8.8) Definition: (Limes superior, limes inferior) Sei $H(a_n)$ die Menge der Häufungswerte einer reellen Zahlenfolge (a_n) . Setze

- $\limsup (a_n) := \sup H(a_n)$
- $\liminf (a_n) := \inf H(a_n)$

Vorsicht: Die Schreibweise macht keine Aussage über die Existenz. Beispielsweise hat die Folge (2^n) keinen limes superior in $\mathbb{R}$.

Ist (a_n) beschränkt, so auch $H(a_n)$ und die Existenz von $\limsup (a_n)$ und $\liminf (a_n)$ ist gesichert. [12.1.06]_†

(8.9) Folgerung: Für eine beschränkte Folge (a_n) existieren $\limsup (a_n)$ und $\liminf (a_n)$ als größter bzw. kleinster Häufungswert. Also gilt sogar: $\limsup (a_n) := \max H(a_n)$, $\liminf (a_n) := \min H(a_n)$.

(8.10) Bemerkung: Im Falle einer konvergenten Folge (a_n) gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_k\}) = \limsup a_n = \lim a_n = \liminf a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} (\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_k\}).$$

(8.11) Lemma: Für eine beschränkte Folge sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1° (a_n) konvergiert.
- 2° $H(a_n)$ ist einpunktig.
- 3° $\limsup a_n = \liminf a_n$

(8.12) Definition: (Die erweiterte Zahlengerade) Wir setzen $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ als die *erweiterte Zahlengerade* mit der *Anordnung* (per definitionem):

$$-\infty < \infty \text{ und } \forall a \in \mathbb{R} : -\infty < a \text{ und } \forall a \in \mathbb{R} : a < \infty.$$

Wir haben dann *Intervalle* in $\overline{\mathbb{R}}$, die als Intervallgrenzen auch ∞ oder $-\infty$ haben können. Als *Umgebungsintervall* von ∞ gilt jedes Intervall $[c, \infty]$ oder $]c, \infty]$ mit $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Analog für $-\infty$.

Eine Folge (a_n) aus $\mathbb{R}$ oder auch aus $\overline{\mathbb{R}}$ hat ∞ als *Häufungswert in $\overline{\mathbb{R}}$* , wenn in jedem Umgebungsintervall $[c, \infty]$, $c \in \mathbb{R}$, unendlich viele Folgenglieder der Folge (a_n) liegen (vgl. 8.5.2°: $\lim n = \infty$). Analog für $-\infty$.

Satz 8.7 in Verbindung mit der offensichtlichen Ausdehnung der Begriffe „limes superior, limes inferior“ auf die erweiterte Gerade $\overline{\mathbb{R}}$ hat jetzt die folgende Verallgemeinerung:

(8.13) Satz: (Bolzano-Weierstrass) Jede Folge aus $\overline{\mathbb{R}}$ hat einen Häufungspunkt in $\overline{\mathbb{R}}$ und die Menge der Häufungswerte von (a_n) in $\overline{\mathbb{R}}$ hat ein kleinstes Element $\liminf a_n$ und ein größtes Element $\limsup a_n$.