Version 21.11. November 2006

MIA – Analysis einer reellen Veränderlichen – WS 06/07

Kurzfassung

Martin Schottenloher

$\infty\,\infty\,\infty$

Kapitel III. Folgen und Reihen in $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ ist jetzt festgelegt durch die Axiome in Kapitel II. Grundlagenfragen nach

1° Eindeutigkeit des Modells (ist gegeben, vgl. 6.6)

2° Existenz (ist ungeklärt, Existenzbeweise sind nicht konstruktiv)

3° Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems der reellen Zahlen (es lässt sich beweisen, dass es keinen elementaren Widerspruchsfreiheitsbeweis gibt)

4° Redundanz des Axiomensystems der reellen Zahlen (ist gegeben, z.B. lassen sich M.1 – M.4, D, O.4 aus den restlichen Axiomen herleiten)

sind nicht Gegenstand dieser Vorlesung und werden daher nicht weiter verfolgt.

Thema der Vorlesung ist das Studium von Funktionen

$$f : U \to \mathbb{R}$$

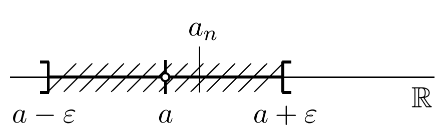
auf Intervallen U oder auf anderen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}$ in Bezug auf kleine Änderungen des Arguments $x \in U$: Also werden $f(x)$ und $f(x+h)$ für kleine h verglichen, insbesondere für $h \longrightarrow 0$.

Dazu benötigen wir zunächst den Begriff der Konvergenz von reellen Zahlenfolgen und Zahlenreihen.

§7 Grenzwert von Folgen reeller Zahlen

Bezeichnung: $\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq m\}$ für $m \in \mathbb{Z}$. $\mathbb{N}_m$ ist ein System natürlicher Zahlen, vgl. §6, und wird zur Indizierung von Folgen verwendet.

(7.1) Definition: Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\geq m}$ *konvergiert gegen* $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $k \in \mathbb{N}_{n_0}$ gilt: $a_k \in \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.



Sprechweisen: a heißt dann der *Grenzwert* (oder der *Limes*) von (a_n). In Zeichen: $a_n \longrightarrow a$ für $n \longrightarrow \infty$ oder $a = \lim_{n\to\infty} a_n$; auch kurz: $a_n \longrightarrow a$ oder $a = \lim a_n$. Die Folge (a_n) heißt *konvergent*, wenn es $a \in \mathbb{R}$ mit $a = \lim a_n$ gibt; andernfalls heißt (a_n) *divergent*. Eine Folge (a_n), die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*.

Weil $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnet ist, gilt unmittelber:

(7.2) Führungsbeispiel: Die Folge $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ konvergiert gegen 0.

(7.3) Definition: (*Betragsfunktion*) $|x| := \max\{x, -x\}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Für das Umgebungsintervall gilt: $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\, = \{x \in \mathbb{R} \;:\; |x-a| < \varepsilon\}$.

(7.4) Folgerung: $a = \lim a_n \iff \lim |a_n - a| = 0$

(7.5) Satz: *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*
1° $0 \leq |x|$ und $0 = |x| \Rightarrow x = 0$,
2° $|x+y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung*)
3° $|xy| = |x|\,|y|$

(7.6) Beispiele:
1° $\lim \frac{1}{n} = 0$ (vgl. 7.2).
2° $a_n := a$ (konstante Folge). Dann: $a_n \longrightarrow a$.
3° $((-1)^n)$ divergiert.
4° $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.
5° $\lim \frac{n}{n+1} = 1$.
6° (n) divergiert (aus ganz anderen Gründen als 3°: (n) ist nicht bechränkt).

(7.7) Satz: *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ eine konvergente reelle Zahlenfolge. Dann:*
1° *(a_n) ist beschränkt, d.h. die Menge $\{a_n \mid n \geq m\}$ ist eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$.*
2° *$a = \lim_{n\to\infty} a_n$ ist eindeutig bestimmt.*
3° *Wird die Folge (a_n) an endlich vielen Stellen (Indizes) $n \geq m$ zu einer Folge (a'_k) verändert, so konvergiert (a'_k) mit $\lim a'_k = \lim a_n$* (vgl. 7.9.5°).
4° *Ist $\sigma : N_k \to \mathbb{N}_m$ eine Bijektion, so ist auch die Folge $(b_j)_{j\in\mathbb{N}_k}$, definiert durch $b_j := a_{\sigma(j)}$, konvergent mit demselben Grenzwert $\lim b_j = \lim a_n$.*

Fortsetzung der Beispielliste 7.6:
7° $\lim \frac{2n+1}{n} = 2$.
8° $\lim \frac{n^2+4n}{n^3+6n} = 0$.
9° $\lim(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) = 0$.
10° $\lim(\sqrt{k})^{-1} = 0$.

[21.11.06]

(7.8) Satz: *Sei $q \in \mathbb{R}$. Für die Folge (q^n) gilt:*
1° *$\lim q^n = 0$, falls $|q| < 1$.*
2° *$\lim q^n = 1$, falls $q = 1$.*
3° *(q^n) divergiert für $q \in \mathbb{R}\setminus\,]-1, 1]$.*
4° *Für $|q| < 1$ konvergiert die* geometrische Reihe

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{q^k} = \frac{1}{1-q} ,$$

ansonsten liegt Divergenz vor.

5° *Für* $q > 0$ *gilt* $\lim \sqrt[n]{q} = 1$.

(7.9) Rechnen mit Grenzwerten: Es seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$. Dann:

1° $a_n + b_n \longrightarrow a + b$

2° $ca_n \longrightarrow ca$

3° $a_n b_n \longrightarrow ab$

4° $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$.

5° $a = b$ (also $\lim a_n = \lim b_n$) $\Longleftrightarrow a_n - b_n \longrightarrow 0$

6° Es seien a_n, a in einem Intervall I enthalten, auf der eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gegeben sei, die eine *Lipschitzbedingung* erfüllt, d.h. zu der es $L > 0$ gibt mit: $\forall\, x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$. Dann gilt $\lim f(a_n) = f(a)$, also $\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$.

(7.10) Definition: Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \geq m}$ heißt *monoton*, wenn sie monoton fallend oder monoton wachsend (man sagt auch: monoton steigend) ist. Dabei heißt sie *monoton fallend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}_m$ gilt: $a_n \geq a_{n+1}$, und sie heißt *monoton wachsend*, wenn $(-a_n)$ monoton fallend ist, wenn also für alle $n \in \mathbb{N}_m$ gilt: $a_n \leq a_{n+1}$.

(7.11) Konvergenzkriterium: *Eine monotone Folge reeller Zahlen ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist. Ist* (a_n) *monoton wachsend und beschränkt, so gilt* $\lim a_n = \sup a_n$ *und für monoton fallende Folgen analog.*

(7.12) Anwendungen: Wichtige Anwendungen von 7.9 und 7.11 sind:

(7.12.1°) Wachstumsvergleich: Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{n!} = 0\,.$$

(7.12.2°) Die Eulersche Zahl e**:**

$$e := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$$

Es gilt für alle $n \in N$ die Abschätzung

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{2}{(n+1)!}$$

(7.12.3°) Quadratwurzel: Sei $a > 0$. Zu $x_0 > 0$ (beliebig !) setze

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \;,\; n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $(x_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend und konvergiert gegen $\sqrt{a}$. Der Fehler $\Delta_n := x_n - \sqrt{a}$ erfüllt

$$\Delta_{n+1} \leq \frac{1}{2} \min\{\Delta_n\,,\, \frac{\Delta_n^2}{\sqrt{a}}\}\,.$$