Version 13.11. November 2006

MIA – Analysis einer reellen Veränderlichen – WS 06/07

Kurzfassung

Martin Schottenloher

$\infty\,\infty\,\infty$

Kapitel II. Die reellen Zahlen

Die reellen Zahlen werden in diesem Kapitel **axiomatisch** eingeführt als Elemente des Körpers $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. $\mathbb{R}$ wird als vollständig angeordneter Körper charakterisiert. Entsprechend haben wir in diesem Kapitel einen Paragraphen über die *Körpereigenschaften*, einen weiteren über *angeordnete Körper* und einen abschließenden Paragraphen über die *Vollständigkeit* von angeordneten Körpern.

§4 Körper

(4.1) Definition: Ein *Körper* ist eine Menge K zusammen mit zwei *Verknüpfungen* $+ : K\times K \to K$ sowie $\cdot : K \times K \to K$ und den ausgezeichneten Elementen $0, 1 \in K$ mit $0 \neq 1$, so dass die folgenden aus §2 und §3 bekannten Axiome erfüllt sind: A.1 - A.4, M.1 – M.4 und D, also

$$\forall\, a, b, c \in K$$

A.1	$(a + b) + c = a + (b + c)$	M.1	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
A.2	$a + b = b + a$	M.2	$a \cdot b = b \cdot a$
A.3	$a + 0 = a$	M.3	$a \cdot 1 = a$
A.4	$\exists\, x \in K : a + x = b$	M.4	$a \neq 0 \Rightarrow \exists\, x \in K : a \cdot x = b$

D $\quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

(4.2) Beispiele:

1° $\mathbb{Q}$ ist ein Körper nach 3.4. $\mathbb{R}$ aus dem Vorwissen (der Schule zum Beispiel) oder entsprechend der zum Ende des Paragraphen 3 beschriebenen Konstruktion ist ebenfalls ein Körper.

2° $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ist ein Körper, der eine Lösung zu $x^2 = 5$ hat (vgl. Übungen in MIB); entsprechend $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$, aber auch $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$, etc. Wir erhalten so unendlich viele verschiedene Körper.

3° Der Minimalkörper aus zwei Elementen: $\mathbb{Z}_2 := \{\bar{0}, \bar{1}\}$.

4° Zu jeder Primzahl p findet man einen Körper $\mathbb{Z}_p$ mit genau p Elementen: Dazu muss auf der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_p$ mit p Elementen die natürliche Multiplikation betrachtet werden. $p = 2$ ist das Beispiel 3°.

5° $\mathbb{N}$ ist nicht Körper, da nicht einmal die Subtraktion uneingeschränkt durchführbar ist.

6° In $\mathbb{Z}$ ist die Subtraktion uneingeschränkt durchführbar ($\mathbb{Z}$ ist bezüglbih der Addition eine abelsche Gruppe, vgl. 3.2). Aber auch $\mathbb{Z}$ ist nicht Körper, da in $\mathbb{Z}$ die Division nicht uneingeschränkt durchführbar ist (vgl. §3).

(4.3) Bemerkung: Ist K ein Körper mit den neutralen Elementen $0, 1 \in K$, so ist sowohl K bezüglich $+$ und 0 eine abelsche Gruppe als auch $K^* := K \backslash \{0\}$ bezüglich $\cdot$ und 1.

Umgekehrt gilt: Sei K eine Menge mit zwei Verknüpfungen $K \times K \to K$, geschrieben als Addition $+$ und als Multiplikation $\cdot$, sowie mit zwei ausgezeichneten Elementen $0, 1 \in K$. Ist dann K mit $+$ und 0 eine abelsche Gruppe und gilt das auch für $K^* := K \backslash \{0\}$ mit $\cdot$ und 1, so ist K ein Körper, wenn zusätzlich das Distributivgesetz D gilt.

(4.4) Folgerungen: Sei K ein Körper. Dann gilt für beliebige $a, b, c \in K$:

1° $a + b = a + c \ \Rightarrow\ b = c$,

2° $a \neq 0$ und $ab = ac \ \Rightarrow\ b = c$,

3° $0 \in K$ ist eindeutig als neutrales Element der Addition.

4° $1 \in K$ ist eindeutig als neutrales Element der Multiplikation.

5° $(a + b)c = ac + bc$.

Notationen:

ab anstelle von $a \cdot b$ haben wir schon verwendet.

Die nach 4.4.1° eindeutig bestimmte Lösung x in $a + x = b$ wird auch als $b - a$ geschrieben; im Falle $b = 0$ auch $-a := 0 - a$.

Die im Falle von $a \neq 0$ nach 4.4.2° eindeutig bestimmte Lösung x von $ax = b$ wird auch als $\frac{b}{a}$ oder manchmal $b : a$ geschrieben; im Falle $b = 1$ auch $a^{-1} := \frac{1}{a}$.

(4.5) Rechenregeln: In einem Körper K gilt für alle $a, b, c, d \in K$:

1°	$-0 = 0$	$-(-a) = a$	$b - a = b + (-a)$
	$-(a + b) = -a - b$	$-(a - b) = -a + b$	
2°	$a0 = 0$	$(-a)b = -(ab) - ab$	$(-a)(-b) = ab$
	$-a = (-1)a$	$a(b - c) = ab - ac$	
3°	$ab \neq 0 \ \Rightarrow\ a \neq 0$ und $b \neq 0$		
	$ab \neq 0 \ \Rightarrow\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$		
4°	$a = \frac{a}{1}$		
	$b \neq 0 \quad \Rightarrow\ \frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a} = b \cdot a^{-1}$		
5°	$bd \neq 0 \ \Rightarrow\ \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$; $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$		[7.11.6]

(4.6) Definition: Es sei K ein Körper. Für $a, a_j \in K$ und für natürliche Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ wird rekursiv definiert:

1° $n \cdot a = na$ durch: $0 \cdot a := 0$ (es handelt sich hier um verschiedene Nullen) und $(n+1) \cdot a := n \cdot a + a$.

Der Körper hat die *Charakteristik* 0, wenn $n \cdot 1 \neq 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_1$.

2° a^n durch: $a^0 := 1$ und $a^{n+1} := a^n \cdot a$.

3°

$$\sum_{k=m}^{m} a_k := a_m \ ; \quad \sum_{k=m}^{n+1} a_k := \sum_{k=m}^{n} a_k + a_{n+1}$$

mit der Konvention

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$$

im Falle von $n < m$.

4° Analog das Produktzeichen (vgl. §1):

$$\prod_{k=m}^{n} a_k \,.$$

(4.7) Satz: *Für Elemente* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ *und* $b_1, b_2, \ldots, b_m \in K$ *eines Körpers* K *gilt:*

1° *Für jede Bijektion* $\sigma : A(n) \to A(n)$ *ist*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$$

2° *Die Summe* $\sum_{k=1}^{n} a_k$ *ist unabhängig von jedweder Klammerung.*

3° *Sei* $\tau : A(nm) \to A(n) \times A(m)$ *eine beliebige Anordnung von* $A(n) \times A(m)$*. Dann gilt für* $c_p := a_j b_k$, wobei $p \in A(nm)$ mit $\tau(p) = (j,k)$:

$$\sum_{p=1}^{nm} c_p = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right)$$

und wir schreiben

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_j b_k := \sum_{p=1}^{nm} c_p \,.$$

Ebenso für mehr als zwei Summen mit $a^{(\mu)}_{j_\mu} \in K$ *für* $1 \leq j_\mu \leq n_\mu$, $n_\mu \in \mathbb{N}_1$*:*

$$\prod_{\mu=1}^{m}\sum_{j_\mu=1}^{n_\mu} a^{(\mu)}_{j_\mu} = \left(\sum_{j_1=1}^{n_1} a^{(1)}_{j_1}\right)\left(\sum_{j_2=1}^{n_2} a^{(2)}_{j_2}\right)\ldots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m} a^{(m)}_{j_m}\right) = \sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\ldots\sum_{j_m=1}^{n_m} a^{(1)}_{j_1}a^{(2)}_{j_2}\ldots a^{(m)}_{j_m}$$

Analog für das Produkt: Für jede Bijektion $\sigma : A(n) \to A(n)$ *ist*

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$$

Und einfach

$$\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)\left(\prod_{k=1}^{m} b_k\right) = \prod_{j=1}^{n+m} c_j \,,$$

wobei $c_j := a_j$ für $j \in A(n)$ und $c_{n+k} := b_k$ für $k \in A(m)$.

§5 Angeordnete Körper. Das archimedische Axiom

(5.1) Definition: Ein *angeordneter Körper* ist ein Körper zusammen mit einer Relation $< \subset K \times K$ (geschrieben $a < b$ für $(a,b) \in <$), so dass die aus §2 bekannten Axiome O.1 – O.4 gelten (vgl. 2.7). Also

$$\forall\, a,b,c \in K$$

O.1 $a < b$ und $b < c \;\Rightarrow\; a < c$
O.2 Entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$
O.3 $a < b \;\Rightarrow\; a + c < b + c$
O.4 $a < b$ und $0 < c \;\Rightarrow\; ac < bc$

Zur Abkürzung wieder wie in Kap. I:
$a \le b$ anstelle von „$a < b$ oder $a = b$“;
$a > b$ statt $b < a$;
$a \ge b$ anstelle von „$a > b$ oder $a = b$“.

(5.2) Regeln: Die folgenden Regeln gelten in einem angeordneten Körper K für alle $a,b,c,d \in K$:

1° $a < b \;\Rightarrow\; 0 < b - a$, inbesondere: $a < 0 \;\Rightarrow\; 0 < -a$.
2° $0 < a, 0 < b \;\Rightarrow\; (0 < a + b$ und $0 < ab\,)$.
3° $-1 < 0\,,\; 0 < 1$.
4° $a \neq 0 \;\Rightarrow\; a^2 > 0$.
5° $0 < a < b \;\Rightarrow\; 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
6° $0 < a, 0 < b, 0 < c, 0 < d \;\Rightarrow\; (\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc\,)$.
7° $0 < a, 0 < b, n \in \mathbb{N}_1 \;\Rightarrow\; (a < b \iff a^n < b^n)$.

(5.3) Bemerkungen und Beispiele:

1° Für angeordnete Körper K gilt also $-1 < 0 < 1$. Daher hat ein angeordneter Körper mindestens 3 Elemente (sogar unendlich viele, wie wir weiter unten sehen werden).

2° Der Minimalkörper $K = \mathbb{Z}_2$ (vgl. 4.2.3°) kann also nicht zu einem angeordneten Körper angeordnet werden.

Beachte: $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ kann angeordnet werden (im Sinne von O.1,O.2), z.B. $\bar{0} < \bar{1}$. Aber mit solch einer Anordnung wird der Minimalkörper niemals zu einem angeordneten Körper.

3° $\mathbb{Q}$ ist angeordneter Körper mit der in 3.3 definierten Ordnung (vgl. 3.4).

4° Auch $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ kann mit einer natürlichen Ordnungsrelation versehen werden, die $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ zu einem angeordneten Körper macht. Analog $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$, etc.

5° $\mathbb{R}$ ist angeordneter Körper (Vorwissen und §6).

6° $\mathbb{Q}(i)$ kann nicht zu einem angeordneten Körper angeordnet werden, weil $i^2 = -1$. Denn in einem angeordneten Körper ist nach 5.2 $-1 < 0$ und $a^2 \ge 0$.

Also kann auch der Körper $\mathbb{C}$ nicht zu einem angeordneten Körper gemacht werden.

7° Sei K ein angeordneter Körper. Dann kann der Körper $K((X))$ der formalen Laurentreihen (vgl. Übungen) zu einem angeordneten Körper angeordnet werden.

[10.11.06]

(5.4) Definition: In einem Körper K heißt eine Teilmenge $B \subset K$ *induktiv*, wenn

$$0 \in B \text{ und } \forall\, b \in B : b + 1 \in B\,.$$

(5.5) Satz: *Es sei K ein Körper. Dann ist*

$$\mathbb{N}_K := \{\, x \in K | \forall\, B \subset K \text{ induktiv } \Rightarrow \ x \in B\,\} = \bigcap \{\, B \,|\, B \in K \text{ induktiv } \,\}$$

eine induktive *Teilmenge von K. $\mathbb{N}_K$ ist die kleinste induktive Menge in K, und kann auch als $\mathbb{N}_K = \{n \cdot 1 \mid n \in \mathbb{N}\,\}$ (vgl. 4.6.1°) beschrieben werden.*

Außerdem ist die Abbildung $S : \mathbb{N}_K \to \mathbb{N}_K\,, b \mapsto b + 1$ wohldefiniert und injektiv.

(5.6) Satz: *Sei K ein angeordneter Körper. Dann ist $\mathbb{N}_K$ mit $e = 0$ und $S : b \mapsto b + 1$ ein System natürlicher Zahlen im Sinne der Definition 2.1, $\mathbb{N}_K$ erfüllt also die Peano-Axiome.*

Die Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_K\,,\ n \mapsto n1$ ist bijektiv mit $n < m \iff \varphi(n) < \varphi(m)$.

Insbesondere hat K unendlich viele Elemente und ist von der Charakteristik 0.

(5.7) Satz: *Jeder angeordnete Körper enthält $\mathbb{Q}$ als angeordneten Teilkörper im folgenden Sinne: Es gibt einen Teilkörper $\mathbb{Q}_K \subset K$ und eine strukturerhaltende Bijektion $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_K$.*

(5.8) Definition: Ein angeordneter Körper K heißt *archimedisch angeordnet*, wenn es zu jedem $x \in K$ eine natürliche Zahl $n \in N$ mit $x < n \cdot 1$ gibt. Anders ausgedrückt: K ist archimedisch, wenn $\mathbb{N}_K$ nicht nach oben beschränkt ist.

(5.9) Satz: *Der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist archimedisch angeordnet.*

(5.10) Beispiel: Der Körper $\mathbb{Q}((X))$ der formalen Laurentreihen mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ mit seiner natürlichen Ordnung (vgl. 5.3.7°) ist nicht archimedisch angeordnet.

§6 Vollständig angeordnete Körper: Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen

Im Folgenden sei K ein angeordneter Körper.

(6.1) Definition: Eine Teilmenge $A \subset K$ heißt *nach oben beschränkt*, wenn es ein $b \in K$ gibt, so dass für alle $a \in A$ gilt: $a \leq b$. b heißt dann eine *obere Schranke von* A.

Analog heißt $B \subset K$ *nach unten beschränkt*, wenn es ein $c \in K$ gibt, so dass für alle $b \in B$ gilt: $c \leq b$. c heißt dann *untere Schranke von* B.

Schließlich heißt eine Teilmenge $A \subset K$ *beschränkt*, wenn sie sowohl nach oben wie auch nach unten beschränkt ist.

(6.2) Beispiele: Intervalle. Für $a, b \in K$

1° $[a, b] := \{x \in K \mid a \leq x \leq b\,\}$ (*abgeschlossenes Intervall*)
2° $]a, b[:= \{x \in K \mid a < x < b\,\}$ (*offenes Intervall*)
3° $]a, b] := \{x \in K \mid a < x \leq b\,\}$ (*halboffenes Intervall*)
4° $[a, b[:= \{x \in K \mid a \leq x < b\,\}$ (*halboffenes Intervall*)