

MIA – Analysis einer reellen Veränderlichen – WS 06/07

Kurzfassung
Martin Schottenloher

∞ ∞ ∞

Kapitel I. Natürliche Zahlen

§1 Vollständige Induktion

(1.1) Beweisprinzip der vollständigen Induktion: Eine Aussage $\mathcal{E}(n)$ ist richtig für alle natürlichen Zahlen n , wenn folgendes gilt:

- $\mathcal{E}(0)$ ist richtig. (*Induktionsanfang*)
- Für jede natürliche Zahl n kann $\mathcal{E}(n+1)$ aus $\mathcal{E}(n)$ hergeleitet werden. (*Induktionsschritt*)

Die zweite Bedingung hat auch die folgende Formulierung: Unter der Hypothese $\mathcal{E}(n)$ (*Induktionsvoraussetzung*) kann für jede natürliche Zahl n die Aussage $\mathcal{E}(n+1)$ bewiesen werden.

Sprechweise: Induktion *nach* n

Schematisch: Zeige $\mathcal{E}(0)$; zeige $\mathcal{E}(n) \Rightarrow \mathcal{E}(n+1)$.

Oder: $n = 0$; $n \rightarrow n+1$.

[17.10.06]

(1.2) Satz: $2^n > n$ für alle natürlichen Zahlen n .

(1.3) Satz: Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $0 + 1 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

(1.4) Satz: Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $1 + 3 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$.

(1.5) Satz: Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $0^2 + 1^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

(1.6) Notation:

- Die Menge $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ der natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet.
- „ $\forall n \in \mathbb{N}$ “ ist Abkürzung für „Für alle natürlichen Zahlen n “.
- „ $\exists n \in \mathbb{N}$ “ ist Abkürzung für „Es gibt eine natürliche Zahl n “.

(1.7) Satz: (Geometrische Summenformel) Sei x eine reelle Zahl $x \neq 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

(1.8) Satz: (Bernoulli-Ungleichung) Sei x eine reelle Zahl $x \geq -1$.

$$\forall n \in \mathbb{N} : (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

(1.9) Rekursive Definition I: Die Vorschrift

- Festlegung von a_0 (als Objekt, Zahl, Element, ...)
- F_n (Rechenschritt, Schema, Abbildung, ...)

liefert eine *Folge* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch die *Definition*

a_0 wie oben vorgegeben und $a_{n+1} := F_n(a_n)$ (oder allgemeiner $a_{n+1} := F_n(a_0, a_1, \dots, a_n)$).

Beispielsweise (jeweils für $n \in \mathbb{N}$):

1° **Potenz:** $x^0 := 1$; $x^{n+1} := (x^n) x$ für reelle Zahlen x .

2° **Summenzeichen:**

$$\sum_{k=0}^0 b_k := b_0 ; \quad \sum_{k=0}^{n+1} b_k := \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) + b_{n+1}$$

für reelle Zahlen b_k .

3° **Produktzeichen:**

$$\prod_{k=0}^0 b_k := b_0 ; \quad \prod_{k=0}^{n+1} b_k := \left(\prod_{k=0}^n b_k \right) b_{n+1}$$

für reelle Zahlen b_k .

[20.10.06]

4° **Fakultät:**

$$0! := 1 ; \quad (n+1)! := n!(n+1)$$

(1.10) Satz: $n!$ ist die Anzahl der Anordnungen von n verschiedenen Objekten, d.h. die Anzahl der Möglichkeiten, die Elemente einer n -elementigen Menge in einer Reihe anzuordnen ($n \in \mathbb{N}$).

(1.11) Folgerung: $n!$ ist die Anzahl der Permutationen einer n -elementigen Menge ($n \in \mathbb{N}$).

(1.12) Definition: (Verallgemeinerter Binomialkoeffizient) Für eine reelle Zahl α setze

$$\binom{\alpha}{0} := 1 ; \quad \binom{\alpha}{k+1} := \frac{\alpha - k}{k+1} \binom{\alpha}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(1.13) Satz:

1° Für jede reelle Zahl α gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \binom{\alpha}{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} \prod_{\mu=0}^k (\alpha - \mu).$$

2°

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} : k \leq n \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

3° Für natürliche Zahlen $k \leq n$ ist die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge gerade der Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k}.$$

4° Für jede reelle Zahl α gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}.$$

5° Für natürliche Zahlen $m \leq n$ gilt stets:

$$\sum_{k=0}^{n-m} \binom{k+m}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

(1.14) Satz: (Der binomische Lehrsatz) Für beliebige reelle Zahlen x, y gilt für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

(1.15) Varianten des Beweisprinzips der vollständigen Induktion: Sei $p \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $\mathbb{N}_p := \{n \in \mathbb{N} | n \geq p\}$. [24.10.06]

1° $\mathcal{E}(n)$ sei formuliert für alle n aus $\mathbb{N}_p$. Dann gilt $\mathcal{E}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_p$, wenn gezeigt werden kann:

- $\mathcal{E}(p)$ (Induktionsanfang)
- $\forall n \in \mathbb{N}_p : \mathcal{E}(n) \Rightarrow \mathcal{E}(n+1)$ (Induktionsschritt)

2° Entsprechend wird die *rekursive Definition* ausgedehnt auf Folgen, die mit einer Zahl $p \in \mathbb{N}$ beginnen: $(a_n)_{n \geq p}$. a_p durch Festsetzung und $a_{n+1} := F_n(a_n)$ oder $a_{n+1} := F_n(a_p, a_{p+1}, \dots, a_n)$.

3° Weitere Variante: $\mathcal{E}(n)$ sei formuliert für alle n aus $\mathbb{N}_p$. Dann gilt $\mathcal{E}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_p$, wenn gezeigt werden kann:

- $\mathcal{E}(p)$ (Induktionsanfang)
- $\forall n \in \mathbb{N}_p : \mathcal{E}(p) \wedge \mathcal{E}(p+1) \wedge \dots \wedge \mathcal{E}(n) \Rightarrow \mathcal{E}(n+1)$ (Induktionsschritt)

(1.16) Beispiele:

1° $\forall n \in \mathbb{N}_5 : 10n \leq n!$

2° $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$; $\sum_{k=p}^m a_k = a_p + a_{p+1} + \dots + a_m$. Im Falle $n < p$ wird

$$\sum_{k=p}^n a_k := 0$$

gesetzt (Leere Summe).

3° Aus 1.3, 1.4 ergeben sich $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$; $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$.

4° 1.13.5° ist $\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

5° $\prod_{k=p}^m a_k = a_p a_{p+1} \dots a_m$. Im Falle $n < p$ wird

$$\prod_{k=p}^n a_k := 1$$

gesetzt (Leeres Produkt).

(1.17) Satz: (Primzahlzerlegung) Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_2$ hat eine Zerlegung (bzw. Produktdarstellung) der Form

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_m^{r_m} = \prod_{\mu=1}^m p_\mu^{r_\mu}$$

mit: p_μ ist die μ -te Primzahl, $m \in \mathbb{N}$, und die $r_\mu \in \mathbb{N}$ sind geeignete Exponenten.

Bemerkung: Die Zerlegung ist eindeutig, das bedeutet, dass die Zahlen $m \in \mathbb{N}$ und $r_\mu \in \mathbb{N}$, mit $r_m \neq 0$, durch n bestimmt sind und Funktionen $m, r_\mu : \mathbb{N}_2 \rightarrow \mathbb{N}$ liefern.

(Achtung: Diese Eindeutigkeitsaussage wurde in der Vorlesung nicht bewiesen.)

§2 Peano-Axiome

(2.1) PEANO-Axiome: Ein System *natürlicher Zahlen* ist eine Menge $\mathbb{M}$ zusammen mit einem Element $e \in \mathbb{M}$ und einer Abbildung $S : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$, so dass die folgenden Axiome erfüllt sind:

P.1 S ist injektiv.

P.2 $e \notin S(\mathbb{M})$.

P.3 Für jede Teilmenge $B \subset \mathbb{M}$ gilt: Aus $e \in \mathbb{M}$ und $S(B) \subset B$ folgt stets $B = \mathbb{M}$.

(2.2) Bemerkungen: 1° P.3 entspricht dem Prinzip der vollständigen Induktion und heißt daher auch das *Induktionsaxiom*.

2° $\mathbb{M} = \{e\} \cup S(\mathbb{M})$.

3° e ist das *Anfangselement*, S ist die *Nachfolgerfunktion*, $S(x)$ ist der *Nachfolger* von $x \in \mathbb{M}$.

Insbesondere: $S(e) \neq e$ nach Axiom P.2, $S(S(e)) \neq S(e)$ nach Axiom P.1, usw. Insgesamt:

4° $\forall x \in \mathbb{M} : S(x) \neq x$.

5° Modelle für Systeme natürlicher Zahlen:

i)	$\mathbb{M} : e, S(e), S(S(e)), S(S(S(e))), \dots$	$x \mapsto S(x)$
ii)	$\mathbb{M} : = e, , , \dots$	$S(\dots) = \dots $
iii)	$\mathbb{M} : e = \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots$	$S(x) = \{x\}$
iv)	$\mathbb{M} = \mathbb{N}_k : e = k, k+1, k+2, \dots$	$S(x) = x+1$

6° Zur Existenz (eines Systems natürlicher Zahlen):

i) Modelltheoretisch nach ii) oder iv).

ii) Aus der Mengenlehre nach iii). Die Existenz eines Systems mit P.1–P.3 entspricht in der Mengenlehre dem Unendlichkeitsaxiom. [27.10.06]

7° Konsistenz: Widerspruchsfreiheit des Systems ist gewährleistet.

8° Minimalität. Zu jedem $j \in \{1, 2, 3\}$ gibt es ein System $(\mathbb{M}_j, e_j, S_j)$, welches die beiden Axiome P. k , $k \in \{1, 2, 3\} \setminus \{j\}$, erfüllt aber P. j verletzt. Also ist das Axiomensystem P.1 – P.3 minimal (nicht verkürzbar).

9° Unvollständigkeit: Kurt Gödel 1906*.

(2.3) Satz: (Eindeutigkeit) *Alle Systeme natürlicher Zahlen sind strukturgleich in folgendem Sinne: Seien die Systeme natürlicher Zahlen $(\mathbb{M}, e, S)$ und $(\mathbb{M}^*, e^*, S^*)$ vorgegeben. Dann existiert eine eindeutig bestimmte bijektive Abbildung*

$$\varphi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^*$$

mit den folgenden Eigenschaften:

$$\varphi(e) = e^* \text{ und } \forall x \in \mathbb{M} : \varphi(S(x)) = S^*(\varphi(x)), \text{ d.h. } S^* \circ \varphi = \varphi \circ S.$$

Im Folgenden verwenden wir in der Regel das Modell $\mathbb{N}$ mit der Null als Anfangselement e und mit $S(n) = n + 1$ als Nachfolgerfunktion (oder auch $\mathbb{N}_p$).

Trotz des Symbols „+“ in $S(x) = x + 1$ ist aber die Addition nicht definiert, wenn wir $\mathbb{N}$ als ein Modell für die Peanoaxiome verwenden und sonst nichts voraussetzen, ebensowenig die Multiplikation. Daher müssen diese Operationen wie auch die Ordnungsrelation noch definiert werden:

(2.4) Satz – Definition: Auf dem System der natürlichen Zahlen ist (mit der Notation $0 = e$, $1 = S(0)$ und $S(x) = x + 1$) durch

- $x + 0 := x$
- $x + S(y) := S(x + y)$ (oder $x + (y + 1) := (x + y) + 1$)

für alle $x, y \in \mathbb{N}$ eine Addition $+$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definiert, die die folgenden Regeln (Axiome) erfüllt: $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$:

- A.1 $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Assoziativitätsgesetz)
- A.2 $x + y = y + x$ (Kommutativitätsgesetz)
- A.3 $x + 0 = x$ (0 ist *neutrales Element* der Addition.)

(2.5) Satz – Definition: Auf dem System der natürlichen Zahlen ist durch

- $x \cdot 1 := x$
- $x \cdot S(y) := S(x \cdot y)$ (oder $x \cdot (y + 1) := (x \cdot y) + 1$)
- $x \cdot 0 := 0$

für alle $x, y \in \mathbb{N}$ eine Multiplikation $\cdot$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definiert, die die folgenden Regeln (Axiome) erfüllt: $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$:

- M.1 $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (Assoziativitätsgesetz)
- M.2 $x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativitätsgesetz)
- M.3 $x \cdot 1 = x$ (1 ist *neutrales Element* der Multiplikation.)
- D $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (Distributivgesetz)

Statt $x \cdot y$ schreiben wir im Folgenden meist xy .

(2.6) Satz: $\forall k, m, n \in \mathbb{N}$:

- 1° $(k + m)n = kn + mn$
- 2° $k + m = k + n \Rightarrow m = n$
- 3° $k \neq 0 : km = kn \Rightarrow m = n$

(2.7) Satz – Definition: Zu jedem Paar $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ von natürlichen Zahlen mit $x \neq y$ gibt es eine weitere natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit

$$x + S(k) = y \quad \text{oder} \quad x + S(k) = y.$$

Im ersten Fall sprechen wir von $x < y$ (x ist kleiner als y), und im zweiten Fall von $y < x$ oder (gleichbedeutend damit) $x > y$. Wir haben damit die Ordnung (oder auch Ordnungsrelation) auf $\mathbb{N}$ definiert mit den folgenden Eigenschaften (Axiomen): $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$:

- O.1 $x < y, y < z \Rightarrow x < z$ (Transitivität)
 O.2 $x < y$ oder $x = y$ oder $x > y$ (Trichotomie, „oder“ im Sinne von „aut“)
 O.3 $x < y \Rightarrow x + z < y + z$ (Kompatibilität mit der Addition)
 O.4 $z > 0, x < y \Rightarrow xz < yz$ (Kompatibilität mit der Multiplikation)_[31.10.06]
 Außerdem: $z \neq 0 \Leftrightarrow z > 0$

Notationen: $x \leq y : \Leftrightarrow x = y$ oder $x < y$; analog „ $\geq$ “.

(2.8) Wohlordnungssatz: Jede nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ hat ein erstes Element, d.h. ein $a \in M$ mit: $\forall x \in M : a \leq x$.

(2.9) Bemerkung: Die Aussage des Wohlordnungssatzes ist äquivalent zum Prinzip der vollständigen Induktion.

(2.10) Rekursive Definition II: Es seien Mengen M_n für $n \in \mathbb{N}_p$ ($p \in \mathbb{N}$) gegeben mit Abbildungen $g_n : M_p \times M_{p+1} \times \dots \times M_n \rightarrow M_{n+1}$. Dann wird durch die Wahl eines Elementes $a_p \in M_p$ und durch $a_{n+1} := g_n(a_p, a_{p+1}, \dots, a_n)$ eine eindeutig bestimmte Folge $(a_n)_{n \geq p}$ mit $a_n \in M_n$ definiert.

(2.11) Definition:

- 1° Zwei Mengen X, Y heißen *gleichmächtig*, wenn es eine Bijektion $f : X \rightarrow Y$ gibt.
 2° Eine Menge M heißt *endlich*, wenn es eine Bijektion $f : A(k) \rightarrow M$ für eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt. Dabei ist $A(k) := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq k\}$ der *Abschnitt* der ersten n natürlichen Zahlen ab 1. X heißt *unendlich*, falls X nicht endlich ist.

(2.12) Satz: Die Mächtigkeit einer endlichen Menge M ist eindeutig bestimmt. Das heißt, dass für bijektive Abbildungen $f : A(k) \rightarrow M$ und $g : A(k') \rightarrow M$ gilt: $k = k'$.

Notation: $k := \#M$ ist dann die *Anzahl* der Elemente von M .

(2.13) Satz: Für jede Menge M gilt

- 1° M endlich $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \exists f : A(k) \rightarrow M$ *surjektiv* $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \exists g : M \rightarrow A(k)$ *injektiv*
 2° M unendlich $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} \forall f : A(k) \rightarrow M$ *nicht surjektiv* $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} \forall g : M \rightarrow A(k)$ *nicht injektiv*
 3° M unendlich $\Leftrightarrow \exists f : \mathbb{N} \rightarrow M$ *injektiv* $\Leftrightarrow \exists g : M \rightarrow \mathbb{N}$ *surjektiv*

§3 Aufbau des Zahlensystems