Version 24.10. Oktober 2006

# MIA – Analysis einer reellen Veränderlichen

Kurzfassung WS 06/07
Martin Schottenloher

$\infty\,\infty\,\infty$

# Kapitel I. Natürliche Zahlen

## §1 Vollständige Induktion

**(1.1) Beweisprinzip der vollständigen Induktion:** Eine Aussage $\mathcal{E}(n)$ ist richtig für alle natürlichen Zahlen $n$, wenn folgendes gilt:

- $\mathcal{E}(0)$ ist richtig. *(Induktionsanfang)*
- Für jede natürliche Zahl $n$ kann $\mathcal{E}(n+1)$ aus $\mathcal{E}(n)$ hergeleitet werden. *(Induktionsschritt)*

Die zweite Bedingung hat auch die folgende Formulierung: Unter der Hypothese $\mathcal{E}(n)$ *(Induktionsvoraussetzung)* kann für jede natürliche Zahl $n$ die Aussage $\mathcal{E}(n+1)$ bewiesen werden.

Sprechweise: Induktion *nach* $n$
Schematisch: Zeige $\mathcal{E}(0)$ ; zeige $\mathcal{E}(n) \Rightarrow \mathcal{E}(n+1)$.
Oder: $n = 0$ ; $n \to n+1$. [17.10.06]

**(1.2) Satz:** $2^n > n$ *für alle natürlichen Zahlen* $n$.

**(1.3) Satz:** *Für alle natürlichen Zahlen* $n$ *gilt:* $0 + 1 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

**(1.4) Satz:** *Für alle natürlichen Zahlen* $n$ *gilt:* $1 + 3 + ... + (2n+1) = (n+1)^2$.

**(1.5) Satz:** *Für alle natürlichen Zahlen* $n$ *gilt:* $0^2 + 1^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

**(1.6) Notation:**

- Die Menge $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ der natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet.
- „$\forall n \in \mathbb{N}$“ ist Abkürzung für „*Für alle natürlichen Zahlen* $n$“.
- „$\exists n \in \mathbb{N}$“ ist Abkürzung für „*Es gibt eine natürliche Zahl* $n$“.

**(1.7) Satz:** (Geometrische Summenformel) *Sei* $x$ *eine reelle Zahl* $x \neq 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

**(1.8) Satz:** (Bernoulli-Ungleichung) *Sei* $x$ *eine reelle Zahl* $x \geq -1$.

$$\forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

**(1.9) Rekursive Definition I:** Die Vorschrift

- Festlegung von $a_0$ (als Objekt, Zahl, Element, ... )
- $F_n$ (Rechenschritt, Schema, Abbildung, ...)

liefert eine *Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die *Definition*

$a_0$ wie oben vorgegeben und $a_{n+1} := F_n(a_n)$ (oder allgemeiner $a_{n+1} := F_n(a_0, a_1, \dots a_n)$).

Beispielsweise (jeweils für $n \in \mathbb{N}$):

1° **Potenz:** $x^0 := 1$; $x^{n+1} := (x^n)\, x$ für reelle Zahlen $x$.

2° **Summenzeichen:**

$$\sum_{k=0}^{0} b_k := b_0 \ ; \ \sum_{k=0}^{n+1} b_k := (\sum_{k=0}^{n} b_k) + b_{n+1}$$

für reelle Zahlen $b_k$.

3° **Produktzeichen:**

$$\prod_{k=0}^{0} b_k := b_0 \ ; \ \prod_{k=0}^{n+1} b_k := (\prod_{k=0}^{n} b_k) b_{n+1}$$

für reelle Zahlen $b_k$. [20.10.06]

4° **Fakultät:**

$$0! := 1 \ ; \ (n+1)! := n!(n+1)$$

**(1.10) Satz:** $n!$ *ist die Anzahl der Anordnungen von* $n$ *verschiedenen Objekten, d.h. die Anzahl der Möglichkeiten, die Elemente einer* $n$*-elementigen Menge in einer Reihe anzuordnen* ($n \in \mathbb{N}$).

**(1.11) Folgerung:** $n!$ *ist die Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge* ($n \in \mathbb{N}$).

**(1.12) Definition:** (Verallgemeinerter Binomialkoeffizient) Für eine reelle Zahl $\alpha$ setze

$$\binom{\alpha}{0} := 1 \ ; \ \binom{\alpha}{k+1} := \frac{\alpha - k}{k+1}\binom{\alpha}{k}, \ k \in \mathbb{N}.$$

**(1.13) Satz:**

1° *Für jede reelle Zahl* $\alpha$ *gilt:*

$$\forall k \in \mathbb{N} : \binom{\alpha}{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}\prod_{\mu=0}^{k}(\alpha - \mu)\,.$$

2°

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall k \in \mathbb{N} : k \leq n \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

3° *Für natürliche Zahlen* $k \leq n$ *ist die Anzahl der* $k$*-elementigen Teilmengen einer* $n$*-elementigen Menge gerade der Binomialkoeffizient*

$$\binom{n}{k}.$$

4° *Für jede reelle Zahl $\alpha$ gilt:*

$$\forall k \in \mathbb{N} : \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1} .$$

5° *Für natürliche Zahlen $m \leq n$ gilt stets:*

$$\sum_{k=0}^{n-m} \binom{k+m}{m} = \binom{n+1}{m+1} .$$

**(1.14) Satz:** (Der binomische Lehrsatz) *Für beliebige reelle Zahlen $x, y$ gilt für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k .$$

**(1.15) Varianten des Beweisprinzips der vollständigen Induktion:** Sei $p \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $\mathbb{N}_p := \{n \in \mathbb{N} | n \geq p\}$. [24.10.06]

1° $\mathcal{E}(n)$ sei formuliert für alle $n$ aus $\mathbb{N}_p$. Dann gilt $\mathcal{E}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_p$, wenn gezeigt werden kann:

- $\mathcal{E}(p)$ (*Induktionsanfang*)
- $\forall n \in \mathbb{N}_p : \mathcal{E}(n) \ \Rightarrow \ \mathcal{E}(n+1)$ (*Induktionsschritt*)

2° Entsprechend wird die *rekursive Definition* ausgedehnt auf Folgen, die mit einer Zahl $p \in \mathbb{N}$ beginnen: $(a_n)_{n \geq p}$. $a_p$ durch Festsetzung und $a_{n+1} := F_n(a_n)$ oder $a_{n+1} := F_n(a_p, a_{p+1}, \ldots a_n)$.

3° Weitere Variante: $\mathcal{E}(n)$ sei formuliert für alle $n$ aus $\mathbb{N}_p$. Dann gilt $\mathcal{E}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_p$, wenn gezeigt werden kann:

- $\mathcal{E}(p)$ (*Induktionsanfang*)
- $\forall n \in \mathbb{N}_p : \mathcal{E}(p) \wedge \mathcal{E}(p+1) \wedge \ldots \wedge \mathcal{E}(n) \ \Rightarrow \ \mathcal{E}(n+1)$ (*Induktionsschritt*)

**(1.16) Beispiele:**

1° $\forall n \in \mathbb{N}_5 : 10n \leq n!$

2° $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ ; $\sum_{k=p}^{m} a_k = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_m$. Im Falle $n < p$ wird

$$\sum_{k=p}^{n} a_k := 0$$

gesetzt (*Leere Summe*).

3° Aus 1.3, 1.4 ergeben sich $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$ ; $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$ .

4° 1.13.5° ist $\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

5° $\prod_{k=p}^{m} a_k = a_p a_{p+1} \ldots a_m$ . Im Falle $n < p$ wird

$$\prod_{k=p}^{n} a_k := 1$$

gesetzt (*Leeres Produkt*).

**(1.17) Satz:** (Primzahlzerlegung) *Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_2$ hat eine eindeutige Zerlegung (bzw. Produktdarstellung) der Form*

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_m^{r_m} = \prod_{\mu=1}^{m} p_\mu^{r_\mu}$$

*mit: $p_\mu$ ist die $\mu$-te Primzahl und $r_\mu \in \mathbb{N}$ sind (durch $n$ bestimmte) natürliche Zahlen, $r_m \neq 0$.*