

MIA – Analysis einer reellen Veränderlichen

Kurzfassung WS 06/07

Martin Schottenloher

 $\infty \infty \infty$

Kapitel I. Natürliche Zahlen

§1 Vollständige Induktion

(1.1) Beweisprinzip der vollständigen Induktion: Eine Aussage $\mathcal{E}(n)$ ist richtig für alle natürlichen Zahlen n , wenn folgendes gilt:

- $\mathcal{E}(0)$ ist richtig. (*Induktionsanfang*)
- Für jede natürliche Zahl n kann $\mathcal{E}(n+1)$ aus $\mathcal{E}(n)$ hergeleitet werden. (*Induktionsschritt*)

Die zweite Bedingung hat auch die folgende Formulierung: Unter der Hypothese $\mathcal{E}(n)$ (*Induktionsvoraussetzung*) kann für jede natürliche Zahl n die Aussage $\mathcal{E}(n+1)$ bewiesen werden.

Sprechweise: Induktion *nach* n

Schematisch: Zeige $\mathcal{E}(0)$; zeige $\mathcal{E}(n) \Rightarrow \mathcal{E}(n+1)$.

Oder: $n = 0$; $n \rightarrow n+1$.

[17.10.06]

(1.2) Satz: $2^n > n$ für alle natürlichen Zahlen n .

(1.3) Satz: Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $0 + 1 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

(1.4) Satz: Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $1 + 3 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$.

(1.5) Satz: Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $0^2 + 1^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

(1.6) Notation:

- Die Menge $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ der natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet.
- „ $\forall n \in \mathbb{N}$ “ ist Abkürzung für „Für alle natürlichen Zahlen n “.
- „ $\exists n \in \mathbb{N}$ “ ist Abkürzung für „Es gibt eine natürliche Zahl n “.

(1.7) Satz: (Geometrische Summenformel) Sei x eine reelle Zahl $x \neq 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

(1.8) Satz: (Bernoulli-Ungleichung) Sei x eine reelle Zahl $x \geq -1$.

$$\forall n \in \mathbb{N} : (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

(1.9) Rekursive Definition I: Die Vorschrift

- Festlegung von a_0 (als Objekt, Zahl, Element, ...)
- F_n (Rechenschritt, Schema, Abbildung, ...)

liefert eine *Folge* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch die *Definition*

a_0 wie oben vorgegeben und $a_{n+1} := F_n(a_n)$ (oder allgemeiner $a_{n+1} := F_n(a_0, a_1, \dots, a_n)$).

Beispielsweise (jeweils für $n \in \mathbb{N}$):

1° **Potenz:** $x^0 := 1$; $x^{n+1} := (x^n) x$ für reelle Zahlen x .

2° **Summenzeichen:**

$$\sum_{k=0}^0 b_k := b_0 ; \quad \sum_{k=0}^{n+1} b_k := \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) + b_{n+1}$$

für reelle Zahlen b_k .

3° **Produktzeichen:**

$$\prod_{k=0}^0 b_k := b_0 ; \quad \prod_{k=0}^{n+1} b_k := \left(\prod_{k=0}^n b_k \right) b_{n+1}$$

für reelle Zahlen b_k .

[20.10.06]

4° **Fakultät:**

$$0! := 1 ; \quad (n+1)! := n!(n+1)$$

(1.10) Satz: $n!$ ist die Anzahl der Anordnungen von n verschiedenen Objekten, d.h. die Anzahl der Möglichkeiten, die Elemente einer n -elementigen Menge in einer Reihe anzuordnen ($n \in \mathbb{N}$).

(1.11) Folgerung: $n!$ ist die Anzahl der Permutationen einer n -elementigen Menge ($n \in \mathbb{N}$).

(1.12) Definition: (Verallgemeinerter Binomialkoeffizient) Für eine reelle Zahl α setze

$$\binom{\alpha}{0} := 1 ; \quad \binom{\alpha}{k+1} := \frac{\alpha - k}{k+1} \binom{\alpha}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(1.13) Satz:

1° Für jede reelle Zahl α gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \binom{\alpha}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{\mu=0}^{k-1} (\alpha - \mu).$$

2°

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} : k \leq n \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

3° Für natürliche Zahlen $k \leq n$ ist die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge gerade der Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k}.$$

4° Für jede reelle Zahl α gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}.$$

5° Für natürliche Zahlen $m \leq n$ gilt stets:

$$\sum_{k=0}^{n-m} \binom{k+m}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

(1.14) Satz: (Der binomische Lehrsatz) Für beliebige reelle Zahlen x, y gilt für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

(1.15) Varianten des Beweisprinzips der vollständigen Induktion: Sei $p \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $\mathbb{N}_p := \{n \in \mathbb{N} | n \neq p\}$.

1° $\mathcal{E}(n)$ sei formuliert für alle n aus $\mathbb{N}_p$. Dann gilt $\mathcal{E}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_p$, wenn gezeigt werden kann:

- $\mathcal{E}(k)$ (Induktionsanfang)
- $\forall n \in \mathbb{N}_p : \mathcal{E}(n) \Rightarrow \mathcal{E}(n+1)$ (Induktionsschritt)

2° $\mathcal{E}(n)$ sei formuliert für alle n aus $\mathbb{N}_p$. Dann gilt $\mathcal{E}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_k$, wenn gezeigt werden kann:

- $\mathcal{E}(p)$ (Induktionsanfang)
- $\forall n \in \mathbb{N}_p : \mathcal{E}(p) \wedge \mathcal{E}(p+1) \wedge \dots \wedge \mathcal{E}(n) \Rightarrow \mathcal{E}(n+1)$ (Induktionsschritt)

3° Entsprechend wird die *rekursive Definition* ausgedehnt auf Folgen, die mit einer Zahl $p \in \mathbb{N}$ beginnen: $(a_n)_{n \geq p}$.

(1.16) Beispiele:

1° $\forall n \in \mathbb{N}_5 : 10n \leq n!$

2° $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$; $\sum_{k=p}^m a_k = a_p + a_{p+1} + \dots + a_m$. Im Falle $n < p$ wird

$$\sum_{k=p}^n a_k := 0$$

gesetzt (Leere Summe).

Aus 1.3, 1.4 ergeben sich $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$; $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$.

3° $\prod_{k=p}^m a_k = a_p a_{p+1} \dots a_m$. Im Falle $n < p$ wird

$$\prod_{k=p}^n a_k := 1$$

gesetzt (Leeres Produkt).

(1.17) Satz: (Primzahlzerlegung) Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_2$ hat eine eindeutige Zerlegung (bzw. Produktdarstellung) der Form

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_m^{r_m} = \prod_{\mu=1}^m p_\mu^{r_\mu}$$

mit: p_m ist die m -te Primzahl und $r_\mu \in \mathbb{N}_1$ sind (durch n bestimmte) positive natürliche Zahlen.