MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 13
27.1.2020

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Wir bestimmen die affine Normalform der durch die Gleichung

$$x^2 + 2xy + 6y^2 + 2x = -1 \qquad (*_1)$$

gegebenen Quadrik Q_1 mit Hilfe quadratischer Ergänzung und der binomischen Formel. Es ist

$$\begin{aligned}
(*_1) \iff\ & x^2 + 2xy + 2x + 6y^2 + 1 = 0 \\
\iff\ & x^2 + (2y+2)x + 6y^2 + 1 = 0 \\
\iff\ & x^2 + (2y+2)x + (y+1)^2 - (y+1)^2 + 6y^2 + 1 = 0 \\
\iff\ & (x+y+1)^2 - (y^2 + 2y + 1) + 6y^2 + 1 = 0 \\
\iff\ & (x+y+1)^2 + 5y^2 - 2y = 0 \\
\iff\ & (x+y+1)^2 + 5\Big(y^2 - \frac{2}{5}y + \big(\frac{1}{5}\big)^2 - \big(\frac{1}{5}\big)^2\Big) = 0 \\
\iff\ & (x+y+1)^2 + 5\Big(y - \frac{1}{5}\Big)^2 - \frac{1}{5} = 0 \\
\iff\ & 5(x+y+1)^2 + 25\Big(y - \frac{1}{5}\Big)^2 = 1 \\
\iff\ & (\sqrt{5}x + \sqrt{5}y + \sqrt{5})^2 + (5y-1)^2 = 1
\end{aligned}$$

Die Variablentransformation $\binom{w}{z} = \binom{\sqrt{5}x+\sqrt{5}y+\sqrt{5}}{5y-1}$ liefert $w^2 + z^2 = 1$, die affine Normalform einer Ellipse, und mit

$$Q' := \{\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid w^2 + z^2 = 1\}$$

ist für die Affinität

$$g_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad g_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -1 \end{pmatrix},$$

gilt $g_1(Q_1) = Q'$.
Wir bestimmen die affine Normalform der durch die Gleichung

$$5x^2 - 10xy + 6y^2 = 1 \qquad (*_2)$$

gegebenen Quadrik Q_2 mit Hilfe quadratischer Ergänzung und der binomischen Formel. Es ist

$$\begin{aligned}
(*_2) \iff\ & 5(x^2 - 2yx + y^2 - y^2) + 6y^2 = 1 \\
\iff\ & 5(x-y)^2 - 5y^2 + 6y^2 = 1 \\
\iff\ & 5(x-y)^2 + y^2 = 1 \\
\iff\ & (\sqrt{5}x - \sqrt{5}y)^2 + y^2 = 1
\end{aligned}$$

Die Variablentransformation $\binom{w}{z} = \binom{\sqrt{5}x - \sqrt{5}y}{y}$ liefert $w^2 + z^2 = 1$, die affine Normalform einer Ellipse, und für die Affinität

$$g_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad g_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

gilt $g_2(Q_2) = Q'$.

b) Für die Affinität

$$h := g_2^{-1} \circ g_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \text{gilt} \;\; h(Q_1) = Q_2.$$

Die Abbildungsvorschrift für h lautet

$$\begin{aligned} h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Wir bestimmen die affine Normalform der durch die Gleichung

$$(1+r)\,x^2 + r\,y^2 - 2\,r\,x\,y + y - x = 0 \qquad (*)$$

gegebenen Quadrik Q mit Hilfe quadratischer Ergänzung und der binomischen Formel.
[*Zunächst eine Vorüberlegung zum Typ: Es ist* $(1+r)x^2 + ry^2 - 2rxy = (x \;\; y)\underbrace{\begin{pmatrix} 1+r & -r \\ -r & r \end{pmatrix}}_{A=A^T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,
und $\det A = (1+r)\cdot r - r^2 = r$, *also*
$r > 0 \implies Q$ *Ellipse, Punkt oder* $\varnothing$
$r < 0 \implies Q$ *Hyperbel oder sich schneidendes Geradenpaar*
$r = 0 \implies Q$ *Parabel, paralleles Geradenpaar, Doppelgerade oder* $\varnothing$]

Es ist (wir nehmen die y-Glieder nach vorne; dies zieht eine Fallunterscheidung hinsichtlich $r = 0$ oder $r \neq 0$ nach sich, um die wir aber gemäß der Vorüberlegung eh nicht herumkommen werden)

$$(*) \iff ry^2 - 2rxy + y + (1+r)x^2 - x = 0$$

Für $\underline{r \neq 0}$ ist weiter

$$\begin{aligned} &\iff r\Big(y^2 - 2xy + \frac{y}{r}\Big) + (1+r)x^2 - x = 0 \\ &\iff r\Big(y^2 - \big(2x - \frac{1}{r}\big)y\Big) + (1+r)x^2 - x = 0 \\ &\iff r\Big(y^2 - \big(2x - \frac{1}{r}\big)y + \big(x - \frac{1}{2r}\big)^2 - \big(x - \frac{1}{2r}\big)^2\Big) + (1+r)x^2 - x = 0 \\ &\iff r\Big(y - x + \frac{1}{2r}\Big)^2 - r\big(x - \frac{1}{2r}\big)^2 + (1+r)x^2 - x = 0 \\ &\iff r\Big(y - x + \frac{1}{2r}\Big)^2 - rx^2 + x - \frac{1}{4r} + x^2 + rx^2 - x = 0 \\ &\iff r\Big(y - x + \frac{1}{2r}\Big)^2 + x^2 - \frac{1}{4r} = 0 \\ &\iff 4r^2\Big(y - x + \frac{1}{2r}\Big)^2 + 4rx^2 = 1 \qquad (+) \end{aligned}$$

Wir treffen weiter die folgende Fallunterscheidung:
Fall $\underline{r > 0}$: Dann ist

$$(+) \iff \left(2ry - 2rx + \frac{2r}{2r}\right)^2 + (2\sqrt{r}x)^2 = 1$$

Die Variablentransformation $\binom{w}{z} = \binom{2ry-2rx+1}{2\sqrt{r}x}$ liefert $w^2 + z^2 = 1$, die affine Normalform einer **Ellipse**.

Fall $\underline{r < 0}$: Dann ist

$$\begin{aligned}(+) &\iff \left(2ry - 2rx + \frac{2r}{2r}\right)^2 - 4(-r)x^2 = 1\\ &\iff \left(2ry - 2rx + \frac{2r}{2r}\right)^2 - (2\sqrt{-r}x)^2 = 1\end{aligned}$$

Die Variablentransformation $\binom{w}{z} = \binom{2ry-2rx+1}{2\sqrt{-r}x}$ liefert $w^2 - z^2 = 1$, die affine Normalform einer **Hyperbel**.

Im Fall $\underline{r = 0}$ lautet $(*)$:

$$\begin{aligned}& x^2 + y - x = 0\\ \iff\ & x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y = 0\\ \iff\ & \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - (-y + \frac{1}{4}) = 0\end{aligned}$$

Die Variablentransformation $\binom{w}{z} = \binom{x-\frac{1}{2}}{-y+\frac{1}{4}}$ liefert $w^2 - z = 1$, die affine Normalform einer **Parabel**.

3. Die in Abhängigkeit von den Parametern λ, $\mu \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$A(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & -4\\ 1 & \lambda & \mu\\ \mu & 0 & 5\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist genau dann nicht invertierbar, wenn ihre Determinante $\det A(\lambda, \mu) = 0$ ist; wegen

$$\begin{aligned}\det A(\lambda, \mu) &= \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -4\\ 1 & \lambda & \mu\\ \mu & 0 & 5\end{vmatrix}\\ &\underset{\text{Sarrus}}{=} (5\,\lambda^2 + 2\,\mu^2 + 0) - (-4\,\lambda\,\mu + 0 + 10) = 5\,\lambda^2 + 4\,\lambda\,\mu + 2\,\mu^2 - 10\end{aligned}$$

ist die zu betrachtende Menge

$$\begin{aligned}E &= \left\{\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid A(\lambda, \mu) \text{ ist nicht invertierbar.}\right\}\\ &= \left\{\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{5\,\lambda^2 + 4\mu\lambda + 2\,\mu^2 - 10 = 0}_{(*)}\right\}\end{aligned}$$

eine Quadrik im $\mathbb{R}^2$. Wir bestimmen die affine Normalform von E mit Hilfe quadratischer Ergänzung und erhalten

$$
\begin{aligned}
(*) \quad &\iff \quad 5\,\lambda^2 + 4\,\mu\,\lambda + 2\,\mu^2 = 10\\
&\iff \quad 5\Big(\lambda^2 + \frac{4}{5}\,\mu\,\lambda + \big(\frac{4}{10}\mu\big)^2 - \big(\frac{4}{10}\mu\big)^2\Big) + 2\mu^2 = 10\\
&\iff \quad 5\left(\lambda^2 + \frac{4}{10}\mu\right)^2 - \frac{16}{20}\mu^2 + 2\mu^2 = 10\\
&\iff \quad 5\left(\lambda + \frac{2}{5}\,\mu\right)^2 + \frac{6}{5}\mu^2 = 10\\
&\iff \quad \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{2}{5}\,\mu\right)^2 + \frac{3}{25}\mu^2 = 1,
\end{aligned}
$$

und mit der Variablentransformation

$$
\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\lambda + \frac{2}{5}\,\mu) \\ \frac{\sqrt{3}}{5}\,\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{5} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}
$$

ergibt sich die affine Normalform $w^2 + z^2 = 1$; folglich ist E eine Ellipse. Insbesondere ist E eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und liegt damit in einer (offenen) Kreisscheibe mit dem Ursprung als Mittelpunkt und einem hinreichend großen Radius $R > 0$. Für alle $\binom{\lambda}{\mu} \in E$ gilt damit $\lambda^2 + \mu^2 < R^2$; für alle $\binom{\lambda}{\mu} \in \mathbb{R}^2$ mit $\lambda^2 + \mu^2 \geq R^2$ gilt damit $\binom{\lambda}{\mu} \notin E$, so daß $A(\lambda, \mu)$ invertierbar ist.

4. Wir ermitteln für die in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ gegebene Quadrik $Q \subset \mathbb{R}^2$ mit der Gleichung
$$(*) \qquad (1 + 4t)y^2 + x^2 + 2xy + 2tx - (8t^2 - 2t)y = -4t^3 + 1 - t^2$$
die affine Normalform (und damit den Typ) mit quadratischer Ergänzung. Es ist

$$
\begin{aligned}
(*) \quad &\iff \quad x^2 + 2xy + 2tx + (1 + 4t)y^2 - (8t^2 - 2t)y = -4t^3 + 1 - t^2\\
&\iff \quad x^2 + (2y + 2t)x + (y + t)^2 - (y + t)^2 + (1 + 4t)y^2 - (8t^2 - 2t)y = -4t^3 + 1 - t^2\\
&\iff \quad (x + y + t)^2 - y^2 - 2ty - t^2 + y^2 + 4ty^2 - 8t^2y + 2ty \;=\; -4t^3 + 1 - t^2\\
&\iff \quad (x + y + t)^2 + 4ty^2 - 8t^2y = -4t^3 + 1\\
&\iff \quad (x + y + t)^2 + 4t\left(y^2 - 2ty + t^2 - t^2\right) \;=\; -4t^3 + 1\\
&\iff \quad (x + y + t)^2 + 4t\,(y - t)^2 = 1, \qquad\qquad (+)
\end{aligned}
$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $t > 0$ ist
$$(+) \iff (x + y + t)^2 + \left(2\sqrt{t}\,(y - t)\right)^2 = 1,$$
und mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + t \\ 2\sqrt{t}y - 2\sqrt{t}\,t \end{pmatrix}$ ergibt sich $w^2 + z^2 = 1$, die affine Normalform einer Ellipse.
- Für $t = 0$ ist
$$(+) \iff (x + y + t)^2 = 1,$$
und mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + t \\ y \end{pmatrix}$ ergibt sich $w^2 = 1$, die affine Normalform eines parallelen Geradenpaares.

- Für $t < 0$ ist

$$\begin{aligned}(+) &\iff (x+y+t)^2 - 4(-t)(y-t)^2 = 1 \\ &\iff (x+y+t)^2 - \left(2\sqrt{-t}\,(y-t)\right)^2 = 1,\end{aligned}$$

  und mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+t \\ 2\sqrt{-t}\,y - 2\sqrt{-t}\,t \end{pmatrix}$ ergibt sich $w^2 - z^2 = 1$, die affine Normalform einer Hyperbel.