MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 12
20.1.2020

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“

1. Geben sei die Quadrik
$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2xy + 2x + 2y = 0 \right\}.$$
   a) Berechnen Sie den Mittelpunkt von Q und zeigen Sie, daß dieser nicht auf Q liegt. Folgern Sie hieraus – ohne Bestimmung einer Normalform – daß es sich bei Q um eine Hyperbel handelt.
   b) Bestimmen Sie nun die euklidische Normalform von Q (z.B. mit Hilfe der Mittelpunktstransformation).

2. Gegeben sei die Quadrik
$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4\,x\,y + 4\,y^2 - 6\,x + 12\,y + 8 = 0 \right\}.$$
   a) Zeigen Sie, daß Q unendlich viele Mittelpunkte besitzt, und verwenden Sie einen davon, um nach Verfahren II der Vorlesung euklidische Normalform von Q zu bestimmen.
   b) Fertigen Sie eine Skizze von Q im x,y - Koordinatensystem an.

3. Beweisen Sie, daß die Quadriken
$$Q_1 : 5x^2 + 4xy + 2y^2 - 1 = 0, \qquad Q_2 : 3x^2 + 6xy + 11y^2 - 2 = 0$$
in $\mathbb{R}^2$ metrisch äquivalent sind und geben Sie eine Kongruenzabbildung von Q_1 auf Q_2 an.

4. Seien $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch, $b \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$. Für $t \in \mathbb{R}^2$ gelte $2At + b = 0$. Zeigen Sie, daß
$$t^T At + b^T t + c \;=\; c + \frac{1}{2} b^T t.$$
[Anwendung: Die Mittelpunktstransformation $\binom{x}{y} = \binom{u}{v} + t$ führt bekanntlich die Gleichung $(x \quad y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$ über in $(u \quad v)\, A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + t^T At + b^T t + c = 0$, welche gemäß Aufgabe 4 also auch so geschrieben werden kann: $(u \quad v)\, A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c + \frac{1}{2} b^T t = 0.$]

Für die Tutorien vom 20.1. und 22.1.20