MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 4
15.11.2019

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I"

1. a) Seien $A, B, C, D \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß
$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$
   b) Im allgemeinen gilt für $A, B, C, D \subset \mathbb{R}$ jedoch
$$(A \times B) \cup (C \times D) \neq (A \cup C) \times (B \cup D)$$
   Zeigen Sie dies an dem Beispiel $A := B := [1, 2] \subset \mathbb{R}$ und $C := D := [3, 5] \subset \mathbb{R}$ durch eine Skizze im Koordinatensystem.

2. a) Bestimmen Sie für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^{k+1}}{k^2} \quad \text{und} \quad \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{5k+2}.$$
   b) Schreiben Sie
$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - + \ldots - \frac{1}{10^3} \quad \text{und} \quad \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{6}{11} \cdot \ldots \cdot \frac{60}{92}$$
   mit Hilfe des Summen- bzw. Produktzeichens.
   c) Vervollständigen Sie die Aussage
$$\frac{1}{k^2+k} = \frac{?}{k} - \frac{?}{k+1}$$
   so, daß sie für alle $k \in \mathbb{N}$ gültig wird, und bestimmen Sie dann den Wert der Summe
$$\sum_{k=1}^{999} \frac{1}{k^2+k}.$$

3. Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie (ausführlich unter Verwendung der Definition $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$ und den Körperaxiomen in 3.1) für alle $a, b, c, d \in K$ mit $b, d \neq 0$:
$$\text{a)} \quad \frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{a}{b} \qquad\qquad \text{b)} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}.$$

4. Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie:
   a) Für $a, b, c, d \in K$ sind äquivalent:
      i) Es ist $x^2 + ax + b = x^2 + cx + d$ für alle $x \in K$.
      ii) Es ist $a = c$ und $b = d$.
   b) (*Regel von Vieta*) Für $a, b, s, t \in K$ sind äquivalent:
      i) Es ist $x^2 + ax + b = (x + s)(x + t)$ für alle $x \in K$.
      ii) Es ist $a = s + t$ und $b = s \cdot t$.
   c) Lösen Sie für $K = \mathbb{Q}$ die Gleichung $x^2 + 5x - 24 = 0$ mit Hilfe von b).

Abgabe bis 22.11.2019, 14:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).