18 Lineare Algebra und Betriebswirtschaftslehre

In Form von drei typischen Aufgabenstellungen (mit ausführlichen Lösungen) sollen in diesem Abschnitt einige wesentliche Anwendungsfälle der linearen Algebra für die Betriebswirtschaftslehre dargestellt werden.

18.1 Rohstoffe und Endprodukte

Aufgabe: Zur Produktion von drei Endprodukten E_1, E_2 und E_3 werden fünf Rohstoffe R_1, R_2, R_3, R_4 und R_5 benötigt. Die Verbrauchsnormen sind in folgender Übersicht angegeben:

Vom Rohstoff R_1 werden benötigt:

Für die Produktion einer ME vom Endprodukt E_1: 8 ME	Für die Produktion einer ME vom Endprodukt E_2: 7 ME	Für die Produktion einer ME vom Endprodukt E_3: 10 ME

Vom Rohstoff R_2 werden benötigt:

Für die Produktion einer ME vom Endprodukt E_1: 12 ME	Für die Produktion einer ME vom Endprodukt E_2: 6 ME	Für die Produktion einer ME vom Endprodukt E_3: 4 ME

Vom Rohstoff R_3 werden benötigt:

Für die Produktion einer ME vom Endprodukt E_1: 9 ME	Für die Produktion einer ME vom Endprodukt E_2: 9 ME	Für die Produktion einer ME vom Endprodukt E_3: 14 ME

Vom Rohstoff R_4 werden benötigt:

Für die Produktion einer ME vom Endprodukt E_1: 5 ME	Für die Produktion einer ME vom Endprodukt E_2: 10 ME	Für die Produktion einer ME vom Endprodukt E_3: 20 ME

Vom Rohstoff R_5 werden benötigt:

Für die Produktion einer ME vom Endprodukt E_1: 27 ME	Für die Produktion einer ME vom Endprodukt E_2: 18 ME	Für die Produktion einer ME vom Endprodukt E_3: 20 ME

a) Welche Rohstoffmengen werden benötigt, wenn von dem Endprodukt E_1 genau 200 ME, von E_2 genau 400 ME und von E_3 genau 300 ME hergestellt werden sollen?

b) Die zur Verfügung stehenden Rohstoffmengen sind durch den Vektor b gegeben mit

(18.01) $\quad \vec{b}^T = \begin{pmatrix} 1780 & 1480 & 2300 & 2600 & 4520 \end{pmatrix}$

Wie viele Einheiten der Erzeugnisse E_1, E_2 und E_3 können produziert werden, wenn die vorhandenen Rohstoffmengen ausgeschöpft werden sollen?

Lösung:

Zu a) Mit Hilfe einer so genannten *Verbrauchsmatrix* A lässt sich die obige, sehr umfangreiche und verwirrende *Verbalbeschreibung der Verbrauchsnormen* wesentlich kürzer und aussagekräftiger formulieren:

(18.02) $$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 10 \\ 12 & 6 & 4 \\ 9 & 9 & 14 \\ 5 & 10 & 20 \\ 27 & 18 & 20 \end{pmatrix}$$

Ebenso kann die Zusammenstellung der geplanten Produktionsmengen der drei Erzeugnisse in einer Matrix B mit einer Spalte und drei Zeilen, also in dem *Spaltenvektor*

(18.03) $$B = \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix}$$

erfolgen. Durch die Matrizen A und B ist die Aufgabe klar beschrieben.

Die nun anstehende Lösung des Problems, d. h. die Ermittlung der erforderlichen Mengen der Rohstoffe für die geplanten Produktionsmengen, führt uns auf die Aufgabe, die Matrizen A und B (in dieser Reihenfolge) nach den *Regeln der Matrizenmultiplikation* miteinander zu multiplizieren.

Zur Prüfung, ob diese Multiplikation überhaupt möglich ist, sowie zur nachfolgenden Durchführung der Multiplikation verwenden wir am besten das *Schema von Falk* (siehe Seite 229 im Abschnitt 15.5.1). Das Ergebnis ist in Bild 18.1 abzulesen.

				B
				200
				400
				300
	8	7	10	7400
	12	6	4	6000
A	9	9	14	9600
	5	10	20	11000
	27	18	20	18600

Bild 18.1: Matrizenmultiplikation im Schema von Falk

Zuerst: Die Multiplikation von A mit B ist möglich. Als Produkt $A \cdot B$ entsteht eine Matrix mit *einer Spalte und fünf Zeilen*, also ein *Spaltenvektor*.

Den resultierenden Spaltenvektor kann man in Bild 18.1 rechts unten ablesen. Er ist dort dunkel hervorgehoben.

Damit erhalten wir die Lösung der Aufgabe a):

Für die gewünschte Produktionsmengen der Erzeugnisse E_1, E_2 und E_3 werden insgesamt 7400 ME des Rohstoffs R_1, 6000 ME des Rohstoffs R_2, 9600 ME des Rohstoffs R_3, 11000 ME des Rohstoffs R_4 und 18600 ME des Rohstoffs R_5 benötigt.

Zu b): Diese Aufgabenstellung führt uns auf ein *lineares Gleichungssystem*, denn wir müssen *drei unbekannte Produktionsmengen* ermitteln:

Nennen wir sie

x_1 – für die unbekannte Anzahl der Mengeneinheiten des Erzeugnisses E_1,

x_2 – für die unbekannte Anzahl der Mengeneinheiten des Erzeugnisses E_2,

x_3 – für die unbekannte Anzahl der Mengeneinheiten des Erzeugnisses E_3 .

Aus der *Bilanz*, dass die Produkte aus den Unbekannten x_1, x_2 bzw. x_3 und dem jeweils pro Mengeneinheit (ME) einzusetzenden Rohstoff die *Ressourcen ausschöpfen* sollen, folgt ein *lineares Gleichungssystem* mit *fünf Gleichungen* für die *drei Unbekannte* x_1, x_2 und x_3:

x_1	x_2	x_3	=
8	7	10	1780
12	6	4	1480
9	9	14	2300
5	10	20	2600
27	18	20	4520

Bild 18.2: Überbestimmtes lineares Gleichungssystem

Dieses Gleichungssystem, die Bildunterschrift von Bild 18.2 sagt es schon aus, ist *linear* und *überbestimmt*: Hier müssen wir uns, ähnlich wie bei unterbestimmten linearen Gleichungssystemen (siehe Abschnitt 17.4.1 auf Seite 258) darauf einstellen, dass es *keine, eine* oder *unendlich viele* Lösungen geben kann.

Lassen wir uns wieder mit Hilfe des *Gaußschen Algorithmus* durch Rechnung zu einer Erkenntnis führen.

Bevor wir beginnen, sollten wir für die Bequemlichkeit der Rechnung mindestens eine Eins irgendwo beschaffen:

Das können wir erreichen, indem wir die *vorletzte Zeile* durch fünf dividieren.

Dann steht dort in der ersten Spalte eine Eins, und damit haben wir ein ideales *Pivotelement* für den ersten Gauß-Schritt gefunden (siehe Abschnitt 17.3.2 auf Seite 253).

Die vierte Zeile mit dieser Eins wird als *Pivotzeile* markiert, und dann lässt sich durch gezielte Kombination der Pivotzeile mit jeder anderen Zeile erreichen, dass *vier neue Gleichungen* entstehen, die alle unter der *alten Pivotspalte* nur *Nullen* besitzen (Bild 18.3).

	x_1	x_2	x_3	=				
	8	7	10	1780	1			
	12	6	4	1480		1		
	9	9	14	2300			1	
->	*1*	2	4	520	-8	-12	-9	-27
	27	18	20	4520				1
	0	-9	-22	-2380	*			
	0	-18	-44	-4760		*		
	0	-9	-22	-2380			*	
	0	-36	-88	-9520				*

Bild 18.3: Erster Eliminationsschritt

In dem entstandenen System von vier Gleichungen gibt es leider keine weitere Eins, da müssen wir uns ein für die Rechnung bequemes Element wählen. Nehmen wir also zum Beispiel die *Minus neun* in der ersten Zeile der zweiten Spalte als Pivotelement.

Dann markieren wir die neue Pivotzeile, suchen die geeigneten Eliminationskoeffizienten und kombinieren nacheinander die neue Pivotzeile mit den anderen drei Zeilen.

So entstehen schließlich *drei* neue Zeilen, wie beabsichtigt mit *Nullen* unter der alten und nun auch unter der neuen Pivotspalte (Bild 18.4).

	x_1	x_2	x_3	=							
	8	7	10	1780	1						
	12	6	4	1480		1					
	9	9	14	2300			1				
->	*1*	2	4	520	-8	-12	-9	-27			
	27	18	20	4520				1			
->	0	-9	-22	-2380	*				-2	-1	-4
	0	-18	-44	-4760		*			1		
	0	-9	-22	-2380			*			1	
	0	-36	-88	-9520				*			1
	0	0	0	0					*		
	0	0	0	0						*	
	0	0	0	0							*

Bild 18.4: Der Algorithmus bricht ab – es lässt sich kein neues Pivotelement finden

Doch was ergibt sich nebenbei noch – die drei neuen Zeilen enthalten überhaupt nur Nullen. Sowohl links unter den Unbekannten als auch rechts unter dem Gleichheitszeichen. Wir können nicht weiter rechnen, *der Gaußsche Algorithmus bricht ab.*

Aber er endet ohne Widerspruch.

Folglich gibt es *unendlich viele Lösungen*. Um sie zu finden, stellen wir die einzigen beiden Pivotzeilen, die wir auswählen konnten, jetzt zusammen:

x_1	x_2	x_3	=
1	2	4	520
0	*-9*	-22	-2380

Bild 18.5: Beide Pivotzeilen bilden das Dreiecksschema

Offenbar können wir nun *eine der drei Unbekannten frei wählen*, es bietet sich hier x_3 an. Die letzte Zeile wird deshalb so umgeformt, dass x_2 allein auf der linken Seite steht:

(18.04) $$x_2 = \frac{1}{9}(2380 - 22x_3)$$

Setzen wir den erhaltenen Wert für x_2 in die erste Zeile ein, so können wir weiter x_1 durch x_3 ausdrücken:

(18.05) $$\begin{aligned} x_1 &= 520 - 4x_3 - 2[\frac{1}{9}(2380 - 22x_3)] \\ x_1 &= \frac{1}{9}(8x_3 - 80) \end{aligned}$$

Theoretisch – wenn wir nur bei der *rein mathematischen* Umsetzung des Ergebnisses bleiben – könnten wir nun für x_3 auf den rechten Seiten von (18.04) und (18.05) jeden *beliebigen* Zahlenwert einsetzen. Immer würden wir dann dazu passende Werte x_1 und x_2 bekommen, so dass die erhaltene x_1-x_2-x_3-Zusammenstellung das Gleichungssystem erfüllt.

Doch setzen wir nur $x_3 = 0$ und interpretieren wir das Ergebnis für unsere Aufgabenstellung.

Für dieses $x_3 = 0$ ergäben sich nämlich sofort $x_2 = 2380/9 = 264{,}44$ und $x_1 = -80/9 = -8{,}89$. Wir müssten *negative Mengen* an E_1 produzieren, um die Ressourcen auszuschöpfen.

Das ist natürlich ökonomischer Unsinn.

Folglich müssen wir den Bereich für x_3 noch so *einschränken*, dass sowohl die Produktionsmenge x_1 als auch x_2 nicht *negativ* werden kann, d. h. wir müssen unbedingt dafür sorgen, dass x_3 nur so gewählt werden darf, dass die beiden Ungleichungen

(18.06) $$\begin{aligned} \frac{1}{9}(8x_3 - 80) &\geq 0 \\ \frac{1}{9}(2380 - 22x_3) &\geq 0 \end{aligned}$$

gleichzeitig erfüllt sind. Dazu multiplizieren wir zuerst beide Ungleichungen jeweils mit der positiven Zahl 9, dabei bleibt das Relationszeichen erhalten (siehe Abschnitt 3.2.4 auf Seite 39).

Durch erlaubte weitere Umformungen erhalten wir dann

(18.07) $$\begin{aligned} &8x_3 - 80 \geq 0 \Leftrightarrow 8x_3 \geq 80 \Leftrightarrow x_3 \geq 10 \\ &2380 - 22x_3 \geq 0 \Leftrightarrow 22x_3 \leq 2380 \Leftrightarrow x_3 \leq \frac{2380}{22} \Leftrightarrow x_3 \leq 108{,}18 \end{aligned}$$

Beide Bedingungen lassen sich schließlich in einer Ungleichung zusammenfassen:

(18.08) $10 \le x_3 \le 108{,}18$

Damit ist die Aufgabe b) gelöst.

Fassen wir das Ergebnis noch in einem abschließenden *Antwortsatz* zusammen:

> Wenn man sich eine Produktionsmenge des Erzeugnisses E_3 *zwischen 10 und 108 Einheiten* beliebig vorgibt und anschließend die dazu gehörigen Produktionsmengen für die Erzeugnisse E_1 und E_2 aus den Formeln (18.04) und (18.05) berechnet, dann werden für jede derartige Vorgabe die vorhandenen Ressourcen vollständig ausgeschöpft.

18.2 Mehrstufige Produktion

Aufgabe: Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen R_1 und R_2 in der ersten Produktionsstufe die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 her; in der zweiten Produktionsstufe werden aus diesen Zwischenprodukten die Endprodukte E_1 und E_2 gefertigt.

Die Aufwandskoeffizienten der *Rohstoffe je Einheit Zwischenprodukt* sind in der Matrix A, die für die *Zwischenprodukte je Einheit Endprodukt* in der Matrix B enthalten:

(18.09) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Gesucht ist die Matrix, die den *Rohstoffverbrauch je Einheit Endprodukt* enthält.

b) In einem bestimmten Zeitraum sind 10 Einheiten von E_1 und 250 Einheiten von E_2 zu fertigen. Außerdem sind als Ersatzteile 30 Einheiten von Z_1 und jeweils 20 Einheiten von Z_2 und Z_3 bereitzustellen. *Welche Rohstoffmengen* sind dafür erforderlich?

c) Welche *Rohstoffkosten* entstehen, wenn die Rohstoffpreise 12,50 GE für eine Einheit R_1 und 17,20 GE für eine Einheit R_2 betragen?

Lösung: Die gesuchte Matrix, die zusammenfassend beschreibt, welcher Rohstoffverbrauch sich für jede Einheit jedes Endprodukts ergibt, erhält man durch Multiplikation der beiden gegebenen Matrizen A und B. Die Multiplikation findet zweckmäßig wieder im *Schema von Falk* statt:

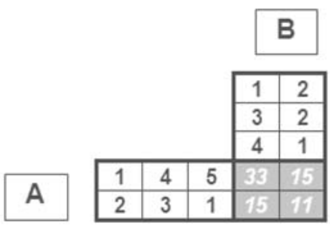

Bild 18.6: Rohstoffverbrauch pro Endprodukt

Rechts unten im hervorgehobenen Bereich findet sich dann die Ergebnismatrix

(18.10) $$C = \begin{pmatrix} 33 & 15 \\ 15 & 11 \end{pmatrix}$$

die zusammengefasst die *Verbrauchsnormen* in folgender Weise beschreibt:

Vom Rohstoff R_1 werden benötigt:

Für die Produktion einer ME vom Endprodukt E_1: 33 ME	Für die Produktion einer ME vom Endprodukt E_2: 15 ME

Vom Rohstoff R_2 werden benötigt:

Für die Produktion einer ME vom Endprodukt E_1: 15 ME	Für die Produktion einer ME vom Endprodukt E_2: 11 ME

Zu b): Stellt man die *geforderten Produktionsmengen* von E_1 und E_2 in einem Spaltenvektor p und die *bereitzustellenden Ersatzteilmengen* der Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 in einem weiteren Spaltenvektor Z zusammen

(18.11) $$\vec{p} = \begin{pmatrix} 120 \\ 250 \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

dann ergibt sich aus den beschriebenen Forderungen die Aufgabe, zwei *Matrixprodukte* zu berechnen und die Ergebnismatrizen zu addieren:

(18.12) $$\vec{r} = C \cdot \vec{p} + A \cdot Z$$

Bild 18.7 zeigt den Rechenweg der beiden Multiplikationen im Schema von Falk.

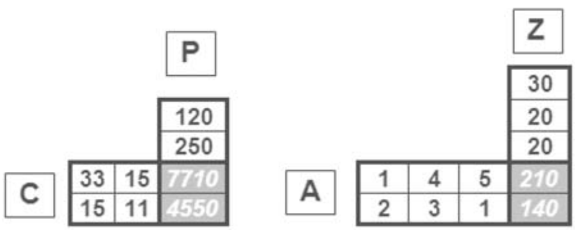

Bild 18.7: Schema von Falk

Die beiden hervorgehobenen Ergebnismatrizen haben als *Spaltenvektoren* mit je zwei Elementen dasselbe Format und dürfen deshalb addiert werden:

(18.13) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 7710 \\ 4550 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 210 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7920 \\ 4690 \end{pmatrix}$

Zur Lösung der Aufgabe b) können wir damit den folgenden *Antwortsatz* formulieren:

Zur Fertigung der geforderten Einheiten der beiden Endprodukte sowie der Ersatzteile werden 7920 Einheiten des Rohstoffs R_1 und 4690 Einheiten des Rohstoffs R_2 benötigt.

Zu c) Die entstehenden *Rohstoffkosten* können elementar berechnet werden, indem die *Mengen* aus der Matrix *R* abgelesen werden und einfach mit den entsprechenden *Preisen* multipliziert werden:

(18.14) $K = 7920 \cdot 12{,}50 + 4690 \cdot 17{,}20 = 179668$

Wir können aber auch die beiden gegebenen Preise in einem *Preisvektor g* zusammenfassen und dann die Kosten aus dem Matrix-Produkt des transponierten Rohstoffmengenvektors $\vec{r}^T$ mit dem Preisvektor g ermitteln:

(18.15) $\vec{g} = \begin{pmatrix} 12{,}50 \\ 17{,}20 \end{pmatrix} \Rightarrow K = \vec{r}^T \cdot \vec{g} = \begin{pmatrix} 7920 & 4690 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12{,}50 \\ 17{,}20 \end{pmatrix} = 179668$

In beiden Fällen ergibt sich: Die Gesamtkosten betragen 179668 GE.

18.3 Maschinenzeitfonds

Aufgabe: Ein Betrieb fertigt vier verschiedene Erzeugnisse auf vier Maschinengruppen. In der Tabelle von Bild 18.8 ist der *Arbeitszeitaufwand in Minuten pro Stück* des Erzeugnisses und der *verfügbare Maschinenzeitfonds* enthalten.

	Arbeitszeitaufwand in min/Stück				
Maschinengruppe	E1	E2	E3	E4	verfügbarer Maschinenzeit-fonds (in min)
M1	1	6	2	2	1000
M2	4	6	2	2	1300
M3	1	9	3	3	1450
M4	5	3	1	1	9050

Bild 18.8: Arbeitszeitaufwand und Maschinenzeitfonds

Für welche Stückzahlen wird der Maschinenzeitfonds voll ausgelastet?

Lösung: Wenn wir mit den Unbekannten x_1 bis x_4 die Anzahl der jeweils herzustellenden Stücke der vier Erzeugnisse bezeichnen und zusätzlich die Ressourcen betrachten, die ausgeschöpft werden sollen, erhalten wir sofort ein *lineares Gleichungssystem*.

x_1	x_2	x_3	x_4	=
1	6	2	2	1000
4	6	2	2	1300
1	9	3	3	1450
5	3	1	1	950

Bild 18.9: Lineares Gleichungssystem der Aufgabe

Dieses System ist *quadratisch*, wir müssen also gemäß Abschnitt 17.2 auf Seite 248 damit rechnen, dass es *keine* oder *genau eine* oder *unendlich viele Lösungen* geben kann.

Starten wir deshalb den *Gaußschen Algorithmus*, um uns während der Rechnung sagen zu lassen, welche *Lösungssituation* hier vorliegt und welche *Schlussfolgerungen* wir ziehen müssen.

Links oben im Gleichungssystem steht gleich eine Eins – es spricht nichts dagegen, sie als *erstes Pivotelement* auszuwählen.

Die erste Zeile wird also als *Pivotzeile* markiert, und es werden rechts die *Eliminationskoeffizienten* festgelegt, mit deren Hilfe die Pivotzeile mit allen anderen Zeilen so kombiniert wird, dass unter der Pivotspalte lauter Nullen entstehen.

Bild 18.10 zeigt den ersten Eliminationsschritt und sein Ergebnis:

	x_1	x_2	x_3	x_4	=			
->	*1*	6	2	2	1000	-4	-1	-5
	4	6	2	2	1300	1		
	1	9	3	3	1450		1	
	5	3	1	1	950			1
	0	-18	-6	-6	-2700	*		
	0	3	1	1	450		*	
	0	-27	-9	-9	-4050			*

Bild 18.10: Erster Eliminationsschritt

Es entstehen, wie beabsichtigt, drei neue Zeilen für die vier Unbekannten, außer in der ersten (Nullen-) Spalte kann im unteren Schema nun ein neues Pivotelement beliebig ausgewählt werden.

Bild 18.11 zeigt es: Zur Bequemlichkeit wird wieder eine Eins ausgewählt, damit ergibt sich die mittlere der drei Zeilen als neue Pivotzeile. Das Ergebnis nach dem zweiten Gauß-Schritt: Es entstehen nur noch Nullen.

Es kann also in den entstehenden restlichen zwei Zeilen kein neues Pivotelement ausgewählt werden, der Gaußsche Algorithmus bricht ab.

Aber er bricht *nicht mit einem Widerspruch* ab, da auch unter dem Gleichheitszeichen Nullen erscheinen. Wir erhalten zwei komplette Nullzeilen.

	x_1	x_2	x_3	x_4	=					
->	*1*	6	2	2	1000	-4	-1	-5		
	4	6	2	2	1300	1				
	1	9	3	3	1450		1			
	5	3	1	1	950			1		
	0	-18	-6	-6	-2700	*			1	
->	0	3	*1*	1	450		*		6	9
	0	-27	-9	-9	-4050			*		1
	0	0	0	0	0				*	
	0	0	0	0	0					*

Bild 18.11: Erster und zweiter Eliminationsschritt

Folglich hat unser lineares quadratisches Gleichungssystem *unendlich viele Lösungen.*

Diese müssen wir jetzt *beschreiben.* Dazu stellen wir zuerst die beiden Pivotzeilen zusammen (Bild 18.12). Damit die *Dreiecksform* (siehe Abschnitt 17.4.2 auf Seite 258) erkennbar wird, wird anschließend die dritte mit der zweiten Spalte vertauscht (Bild 18.13).

x_1	x_2	x_3	x_4	=
1	6	2	2	1000
0	3	*1*	1	450

Bild 18.12: Pivotzeilen

x_1	x_3	x_2	x_4	=
1	2	6	2	1000
0	*1*	3	1	450

Bild 18.13: Dreiecksform

Um schließlich zur *sofort ablesbaren Lösung* zu kommen, streben wir abschließend sogar die *kanonische Form* an:

Wir erzeugen unter den beiden *Basisvariablen* x_1 und x_3 die *Einheitsmatrix* (siehe Abschnitt 17.4.2 auf Seite 260).

Das erreichen wir, indem wir das Doppelte der zweiten Zeile von der ersten Zeile abziehen und die zweite Zeile abschreiben (Bild 18.14).

Jetzt sehen wir es sofort: Für die Unbekannte x_1 ergibt sich der Zahlenwert $x_1 = 100$. Der Wert der zweiten Basisvariablen x_3 dagegen ergibt sich, wenn die Nichtbasisvariablen x_2 und x_4 in *irgendeiner Weise* beliebig vorgegeben sind. Zum Beispiel $x_2 = x_4 = 0 \rightarrow x_3 = 450$. Das wäre dann sogar eine der *Basislösungen.*

x_1	x_3	x_2	x_4	=		
1	2	6	2	1000	1	
0	*1*	3	1	450	-2	1
x_1	x_3	x_2	x_4	=		
1	0	0	0	100	*	
0	1	3	1	450		*

Bild 18.14 Kanonische Form

Ist es aber wirklich so, dass wir für die Nichtbasisvariablen x_2 und x_4 *beliebige* Zahlenwerte vorgeben dürften?

Natürlich nicht – schon *negative Vorgaben* für x_2 und x_4 sind verboten, denn dann würden wir *negative Stückzahlen*, also ökonomischen Unsinn, vorgeben.

Darüber hinaus sind aber auch weitere Vorgaben verboten, zum Beispiel $x_2 = 200$, $x_4 = 200$.

Denn dann ergäbe sich für die abhängige Basisvariable x_3 ein negativer Wert:

$$x_3 = 450 - 3x_2 - x_4 = 450 - 600 - 200 = -350.$$

Auch das wäre unsinnig.

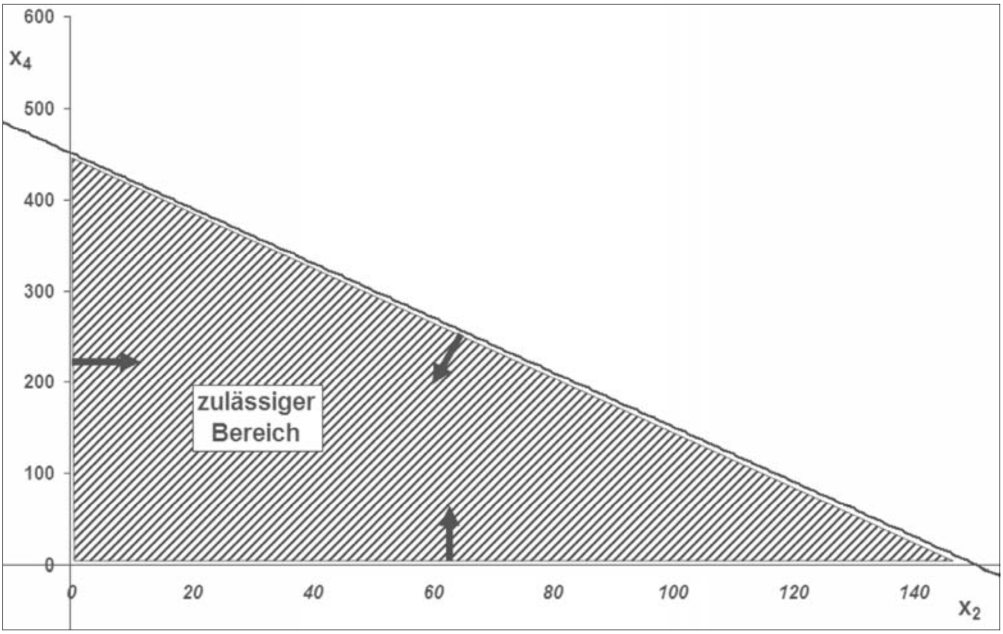

Bild 18.15: Bereich der zulässigen Vorgaben für x_2 und x_4

Zusammengefasst müssen wir also für die Lösung unserer Aufgabe formulieren:

> Die vorgegebenen Ressourcen werden ausgeschöpft, wenn vom Erzeugnis E_1 genau 100 Einheiten hergestellt werden und die Mengen x_2 und x_4 so vorgegeben werden, dass die drei Bedingungen (18.16) erfüllt sind.

$$\begin{aligned} x_2 &\geq 0 \\ x_4 &\geq 0 \\ 450 - 3x_2 - x_4 &\geq 0 \end{aligned} \quad . \tag{18.16}$$

Dann wird die Menge x_3 der herzustellenden Einheiten von E_3 aus der Formel

(18.17) $x_3 = 450 - 3x_2 - x_4$

berechnet.

Die Menge aller x_2 - x_4 - Paare, die das Ungleichungssystem (18.16) erfüllen, lässt sich in einem x_2 - x_4 - Koordinatensystem grafisch darstellen. In Bild 18.15 beschreibt der schraffierte Bereich genau die *Menge der erlaubten Paare*.

Wie man sich solche *zulässigen Bereiche* beschafft, das wird im folgenden Abschnitt 19 ausführlich beschrieben.