MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 6
30.11.2018

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Lösungsvorschlag-

1. a) Wir formen A_α durch EZUs auf ZSF um, sehen an dieser gemäß 2.22, ob A_α invertierbar ist. Im Falle der Invertierbarkeit stellen wir dann durch weitere EZUs die reduzierte ZFS, also die Einheitsmatrix, her. Führen wir dieselben EZUs an E_3 durch, so erhalten wir A_α^{-1}: Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$
\begin{aligned}
(A_\alpha|E_3) \quad &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{\mathrm{III}-2\,\mathrm{I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \Longrightarrow \quad A_\alpha \text{ invertierbar!} \\
&\overset{\mathrm{II}-\alpha\,\mathrm{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{\mathrm{I}+2\,\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 2 & 1+4\alpha & -2\alpha \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{\substack{(-1)\cdot\mathrm{II} \\ (-1)\cdot\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1-4\alpha & 2\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) = (E_3|A_\alpha^{-1});
\end{aligned}
$$

Bereits nach 2 elementaren Zeilenumformungen ist eine ZSF erreicht, aus der wir sofort erkennen (keine Nullzeile!), daß A_α für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ invertierbar ist. Durch die weiteren EZUs bekommt man dann die inverse Matrix

$$A_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1-4\alpha & 2\alpha \\ -1 & -2\alpha & \alpha \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$\det(A_\alpha) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & \alpha \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (0+0-4\alpha) - (-4\alpha+0+1) = -1 \neq 0;$$

damit ist A_α für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ invertierbar.
Des weiteren ergibt sich für die komplementäre Matrix $\widetilde{A_\alpha}$ von A_α

$$\widetilde{A_\alpha} = \begin{pmatrix} +\det A_\alpha^{(11)} & -\det A_\alpha^{(21)} & +\det A_\alpha^{(31)} \\ -\det A_\alpha^{(12)} & +\det A_\alpha^{(22)} & -\det A_\alpha^{(32)} \\ +\det A_\alpha^{(13)} & -\det A_\alpha^{(23)} & +\det A_\alpha^{(33)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1+4\alpha & -2\alpha \\ 1 & 2\alpha & -\alpha \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

so daß sich für die zu A_α inverse Matrix

$$A_\alpha^{-1} = \frac{1}{\det(A_\alpha)} \cdot \widetilde{A_\alpha} = \begin{pmatrix} -2 & -1-4\alpha & 2\alpha \\ -1 & -2\alpha & \alpha \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt.

2. a) Es ist unter Verwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes 3.6

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{vmatrix} \underset{3.6}{\overset{\text{4. Spalte}}{=}} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & t & 0 \\ -t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix} \underset{3.6}{\overset{\text{3. Spalte}}{=}} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{vmatrix} = 1 + t^2.$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $\det A = 1 + t^2 \neq 0$, und damit A invertierbar.

b) Es ist

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} +\det A^{(11)} & -\det A^{(21)} & +\det A^{(31)} & -\det A^{(41)} \\ -\det A^{(12)} & +\det A^{(22)} & -\det A^{(32)} & +\det A^{(42)} \\ +\det A^{(13)} & -\det A^{(23)} & +\det A^{(33)} & -\det A^{(43)} \\ -\det A^{(14)} & +\det A^{(24)} & -\det A^{(34)} & +\det A^{(44)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ -t^2 & -t & 1+t^2 & 0 \\ t^3 & t^2 & -t\,(1+t^2) & 1+t^2 \end{pmatrix}.$$

c) Da die Koeffizientenmatrix A des linearen Gleichungssytems $A \cdot x = b$ invertierbar ist, besitzt dieses genau eine Lösung, nämlich $x = A^{-1} \cdot b$. Es ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ -t^2 & -t & 1+t^2 & 0 \\ t^3 & t^2 & -t\,(1+t^2) & 1+t^2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$x = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ -t^2 & -t & 1+t^2 & 0 \\ t^3 & t^2 & -t\,(1+t^2) & 1+t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1+t^2 \\ 0 \\ 1-t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Cramerschen Regel erhält man für die Komponenten von x

$$x_1 = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & t & 0 & 0 \\ 1+t^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 1-t^2 & 0 & t & 1 \end{vmatrix} \underset{3.8}{\overset{\text{Blockmatrix!}}{=}} \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & t \\ 1+t^2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+t^2} \cdot (-t\,(1+t^2)) \cdot 1 = -t,$$

$$x_2 = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 1+t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-t^2 & t & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks–}}{=}} \frac{1}{1+t^2} \cdot (1 \cdot (1+t^2) \cdot 1 \cdot 1) = 1,$$

$$x_3 = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ -t & 1 & 1+t^2 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t^2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{=} -\frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ -t & 1 & 1+t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{3.8}{\overset{\text{Blockmatrix!}}{=}} -\frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & t \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1+t^2 & 0 \\ 1-t^2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{1+t^2} \cdot t \cdot (1+t^2) = -t,$$

$$x_4 = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 1+t^2 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1-t^2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{3.6}{\overset{\text{3. Spalte}}{=}} \frac{1}{1+t^2} \cdot \left[1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & t & 0 \\ -t & 1 & 1+t^2 \\ 0 & 0 & 1-t^2 \end{vmatrix} - t \cdot \begin{vmatrix} 1 & t & 0 \\ -t & 1 & 1+t^2 \\ 0 & t & 0 \end{vmatrix} \right]$$

$$\underset{3.6}{\overset{\text{3. Zeile}}{=}} \frac{1}{1+t^2} \cdot \left[(1-t^2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{vmatrix} - t \cdot (-1)\, t \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1+t^2 \end{vmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{1+t^2} \cdot \left[(1-t^2)\,(1+t^2) + t^2\,(1+t^2) \right] = (1-t^2) + t^2 = 1.$$

Wir haben bei der Bestimmung obiger Determinanten u.a. 3.8 d) für eine Blockmatrix A verwendet, wobei zu bemerken ist, daß aufgrund von 3.3 d) die Nullen der Blockmatrix hier „rechts oben“ stehen.

3. a) Zunächst besitzt das homogene lineare Gleichungssystem $A\,x = 0$ wegen

$$(A \mid 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \overset{\text{I}\leftrightarrow\text{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\overset{\substack{\text{III}-\text{I} \\ \text{II}-4\,\text{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \overset{\text{III}-\text{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

die Lösungsmenge (es ist $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ frei, $x_2 = -2\lambda$ und $x_1 = 2\lambda - \lambda = \lambda$)

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\,\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für eine Matrix $B = (s_1\ s_2\ s_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit den Spalten $s_1,\ s_2,\ s_3 \in \mathbb{R}^3$ gilt demnach

$$\begin{aligned}
AB = O \quad &\iff \quad A\,(s_1\ s_2\ s_3) = (0,0,0)\\
&\iff \quad (As_1\ As_2\ As_3) = (0,0,0)\\
&\iff \quad As_1 = 0 \ \text{ und } \ As_2 = 0 \ \text{ und } \ As_3 = 0\\
&\iff \quad s_1 \in L_0 \ \text{ und } \ s_2 \in L_0 \ \text{ und } \ s_3 \in L_0\\
&\iff \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -2\,\alpha & -2\,\beta & -2\,\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \ \text{ mit } \ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

b) Jede Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $AB = O$ besitzt gemäß a) die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -2\,\alpha & -2\,\beta & -2\,\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

mit $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$; damit gilt

$$\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -2\,\alpha & -2\,\beta & -2\,\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \alpha + 4\,\beta + \gamma & 2\,\alpha + 5\,\beta + \gamma & 3\,\alpha + 6\,\beta + \gamma \\ -2\,\alpha - 8\,\beta - 2\,\gamma & -4\,\alpha - 10\,\beta - 2\,\gamma & -6\,\alpha - 12\,\beta - 2\,\gamma \\ \alpha + 4\,\beta + \gamma & 2\,\alpha + 5\,\beta + \gamma & 3\,\alpha + 6\,\beta + \gamma \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \alpha + 4\,\beta + \gamma & 2\,\alpha + 5\,\beta + \gamma & 3\,\alpha + 6\,\beta + \gamma \\ -2\,(\alpha + 4\,\beta + \gamma) & -2\,(2\,\alpha + 5\,\beta + \gamma) & -2\,(3\,\alpha + 6\,\beta + \gamma) \\ \alpha + 4\,\beta + \gamma & 2\,\alpha + 5\,\beta + \gamma & 3\,\alpha + 6\,\beta + \gamma \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
BA = O \quad &\iff \quad \left\{ \begin{array}{rrcl} \text{(I)} & \alpha + 4\,\beta + \gamma & = & 0 \\ \text{(II)} & 2\,\alpha + 5\,\beta + \gamma & = & 0 \\ \text{(III)} & 3\,\alpha + 6\,\beta + \gamma & = & 0 \end{array} \right.\\
&\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

und wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\text{II}-2\,\text{I} \\ \text{III}-3\,\text{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{III}-2\,\text{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

können wir etwa

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und damit} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \setminus \{O\}$$

wählen.

4. „$\Longleftarrow$“:
Die ist die Aussage von 4.3 a) und b) und wurde bereits in der Vorlesung bewiesen.

„$\Longrightarrow$“:

Sei nun $\lambda \cdot v = 0_V$.
Falls $\lambda = 0$, so ist die Behauptung offensichtlich erfüllt!
Sei nun $\lambda \neq 0$. Dann ist zu zeigen, daß $v = 0_V$. Wegen $\lambda \neq 0$ existiert $\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}$. Damit folgt aus $\lambda \cdot v = 0_V$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot v) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0_V \\ \overset{4.1b)iii)}{\Longrightarrow} \quad & (\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda) \cdot v = \frac{1}{\lambda} \cdot 0_V \\ & 1 \cdot v = \frac{1}{\lambda} \cdot 0_V \\ \overset{4.3b)}{\Longrightarrow} \quad & 1 \cdot v = 0_V \\ \overset{4.1b)iv)}{\Longrightarrow} \quad & v = 0_V. \end{aligned}$$