Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Lösungsvorschlag-

1. a) Man erhält mit Hilfe der Regel von Sarrus

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (3\cdot 4\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 2) - (1\cdot 4\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 3) \\ &= (36+2+2) - (4+6+6) = 40 - 16 = 24.\end{aligned}$$

Bei der Berechnung von $\det B$ klammern wir zuerst 3 aus der 1. Zeile von B aus (wir schreiben dafür „3 aus I“), und führen dann weiter EZUs vom Typ III durch, die die Determinante dann nicht mehr ändern:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{3 aus I}}{=} 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{II}-\text{I} \\ \text{IV}-\text{III}}}{=} 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{III}-2\text{II}}{=} 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{IV}+\frac{1}{3}\text{III}}{=} 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{Dreiecks-} \\ \text{matrix}}}{=} 3\cdot\left(1\cdot 2\cdot 3\cdot(-\frac{1}{3})\right) = -6.$$

Auch bei der Berechnung von $\det B$ setzen wir EZUs ein, unter Beachtung von 3.4, wonach sich bei Typ I das Vorzeichen der Determinante ändert:

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{II}\leftrightarrow\text{IV}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{I}\leftrightarrow\text{II}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{II}-\text{I}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{Dreiecks-} \\ \text{matrix}}}{=} -(1\cdot 1\cdot 1\cdot 1) = -1.$$

WARNUNG: Die Regel von Sarrus darf **nicht** auf Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\underline{n \geq 4}$ angewandt werden!!

b) Mit Hilfe von 3.3 (Determinantenmultiplikationssatz und der Rechenregeln für Determinanten) ergibt sich ferner

- $\det(-A) = (-1)^3 \det(A) = -24$,
- $\det(AA^\top) = \det(A)\cdot\det(A^\top) = \det(A)\cdot\det(A) = 24^2 = 576$ und
- $\det(B^{-1}C) = \det(B^{-1})\cdot\det(C) = \frac{1}{\det B}\cdot\det C = \frac{1}{-6}\cdot(-1) = \frac{1}{6}$.

Man beachte, daß es für $\det(B \pm C)$ keine Rechenregel gibt, also ist i.a.

$$\det(B-C) \neq \det B - \det C$$

In unserem Fall ist unter Verwendung des Laplaceschen Determinantenentwicklungssatzes

$$\det(B-C) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{3.6}{\overset{3.\text{ Zeile}}{=}} (-1)\cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\cdot(-2-2) = 12.$$

2. a) Wir formen die Matrix mit EZUs um unter Beachtung von 3.4. Es ist

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{V}+\text{I} \\ \text{IV}-\text{I} \\ \text{II}-2\,\text{I}}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{II}\leftrightarrow\text{V}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{III}+2\text{II}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{III}-4\text{V}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{III}\leftrightarrow\text{V}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{V}-\text{IV}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{=}} (-1)\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = -8.$$

Wir können auch 3.8 d) verwenden, denn bei den obigen Umformungen haben wir mit

$$\det A = \ldots = - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

eine Blockmatrix hergestellt, und wir können alternativ mit 3.8 d) und Sarrus weiterrechnen...

$$\ldots = - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-0)\cdot(-16+4+0-(-4)-0-0) = -8,$$

und kommen zum selben Ergebnis: $\det A = -8$.

b) Für jede Matrix $B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ gilt nach dem Determinantenmultiplikationsatz 3.3a)

$$\det\left(B^{2018}\right) = (\det B)^{2018} \geq 0;$$

damit kann wegen $\det(A) = -8 < 0$ keine Matrix $B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit $B^{2018} = A$ existieren.

3. a) Die in Abhängigkeit von den Parametern a, b, $c \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$A_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & c & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

besitzt die Determinante (man beachte, daß nach 3.4 eine EZU vom Typ I das Vorzeichen der Determinante ändert)

$$\det(A_{a,b,c}) = \begin{vmatrix} a & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & c & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{III}\leftrightarrow\text{II}}{=} - \begin{vmatrix} a & 1 & b & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{3.8}{\overset{\text{Blockmatrix!}}{=}} - \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)\cdot(c-3),$$

und damit gilt

$$\det(A_{a,b,c}) = 0 \iff -(a-1)\cdot(c-3) = 0 \iff \quad a = 1 \ \vee \ c = 3.$$

b) Die Äquivalenznormalform $\overline{A}_{a,b,c}$ von $A_{a,b,c}$ hat genau dann zwei Einsen (also zwei Nullzeilen), wenn die Zeilenstufenform von A zwei Nullzeilen hat. Für alle a, b, $c \in \mathbb{R}$ ergibt sich nun mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen

$$A_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & c & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{III}-\text{IV}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} a & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & c & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{III}\leftrightarrow\text{I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 3 \\ a & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{III}-a\,\text{I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 3 \\ 0 & 1-a & b & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & b & 2 \\ 0 & 0 & c & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{IV}\leftrightarrow\text{III}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & b & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{IV}-c\,\text{III}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & b & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-c \end{pmatrix} =: A'_{a,b,c},$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

1. Fall: $a \neq 1$.

Dann ist $A'_{a,b,c}$ Zeilenstufenform mit maximal einer Nullzeile.

2. Fall: $a = 1$.

Wir formen weiter um:

$$A'_{1,b,c} \overset{\text{IV}\leftrightarrow\text{III}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3-c \end{pmatrix} \overset{\text{III}-b\,\text{II}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & 3-c \end{pmatrix}$$

In diesem Fall hat die ZSF genau dann zwei Nullzeilen, wenn $b = 2$ und $c = 3$, wie man sofort sieht.

Zusammenfassend hat also $A_{a,b,c}$ genau dann die angegebene Äquivalenznormalform (mit zwei Einsen), wenn $a = 1$ und $b = 2$ und $c = 3$.

4. a) Für die gegebene Matrix

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

erhalten wir für $n > 2$ mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes

$$\det(T_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & \vdots & \vdots \\ & T_{n-2} & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ \dots & \dots & 1 & 2 & 1 \\ \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Zeile}}{\overset{n\text{–te}}{=}} (-1)^{n+(n-1)} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} & & & \vdots \\ & T_{n-2} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \dots & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+n} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} & & & \vdots \\ & T_{n-2} & & \vdots \\ & & & 1 \\ \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2n-1} \cdot \begin{vmatrix} & & & \vdots \\ & T_{n-2} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \dots & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2n} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} & & & \vdots \\ & T_{n-2} & & \vdots \\ & & & 1 \\ \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} & & & \vdots \\ & T_{n-2} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \dots & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \det(T_{n-1})$$

$$\underset{3.6}{\overset{\text{n-1-te Spalte}}{=}} -1 \cdot \det(T_{n-2}) + 2\det(T_{n-1}) \;=\; 2 \cdot \det(T_{n-1}) - \det(T_{n-2}).$$

b) Wir zeigen die Aussage: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\det T_n = 1$ durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang bei $n = 1$ und $n = 2$: Es ist $T_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ und damit $\det(T_1) = 1$, und

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und damit} \qquad \det(T_2) = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1.$$

Induktionsschluß: „$n-1 \to n$“: Sei $n \geq 3$ und gelte $\det T_k = 1$ für alle $1 \leq k \leq n-1$. Zu zeigen ist: $\det T_n = 1$.

Es ist mit a)

$$\det(T_n) = 2 \cdot \det(T_{n-1}) - \det(T_{n-2}) = 2 \cdot 1 - 1 = 1.$$