MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 2
2.11.2016

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Lösungsvorschlag-

1. a) Formt man die erweiterte Koeffizientenmatrix eines homogenen LGS $A \cdot x = 0$, also $(A \mid 0)$ mit EZUs um, so ändert sich der Vektor auf der rechten Seite nicht. Wir verzichten also beim Umformen von $(A \mid 0)$ auf $(A' \mid 0)$ mit A' ZSF auf das Mitschleppen der 0en rechts und betrachten nur die Koeffizientenmatrix A, die wir auf ZSF umformen:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{IV}+4\,\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+3\,\mathrm{I} \\ \mathrm{II}+2\,\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 & -6 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 0 & 16 & 16 & -16 \\ 0 & 18 & 18 & -18 \end{pmatrix} \overset{\substack{\frac{1}{7}\cdot\mathrm{II} \\ \frac{1}{16}\cdot\mathrm{III} \\ \frac{1}{18}\cdot\mathrm{IV}}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\mathrm{IV}-\mathrm{II} \\ \mathrm{III}-\mathrm{II}}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{I}-5\,\mathrm{II}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(-1)\cdot\mathrm{I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'.$$

Die letzten beiden Umformungsschritte sind dabei im Prinzip nicht nötig (Zeilenstufenform ist schon davor erreicht); um das Auflösen „von unten her“ zu erleichtern, haben wir damit die sog. reduzierte Zeilenstufenform hergestellt, in der die Pivotelemente (also die Zahlen in den „Stufenecken“) gleich 1 sind und über diesen lauter 0en stehen.

Das homogene LGS ist natürlich stets lösbar, und aus der ZSF A' erkennt man, daß x_3 und x_4 freie Variablen sind. Das Auflösen von unten nach oben ergibt nun

$$\begin{aligned} & & x_4 &= \lambda \text{ frei} \\ & & x_3 &= \mu \text{ frei} \\ x_2 + \mu - \lambda = 0 & \quad\Longrightarrow & x_2 &= \lambda - \mu \\ x_1 + \mu + \lambda = 0 & \quad\Longrightarrow & x_1 &= -\lambda - \mu. \end{aligned}$$

Damit lautet die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -\lambda - \mu \\ \lambda - \mu \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Nein. Dies wäre nur dann der Fall, wenn die Zeilenstufenform der Matrix keine Nullzeile enthalten würde. Im vorliegenden Beispiel überzeugt man sich sehr schnell, daß z.B. für $b = e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ das LGS $A \cdot x = b$ nicht lösbar wäre, da mit den obigen EZUs dann bei $(A' \mid b')$ in der 4. Zeile auf der rechten Seite die Zahl $\frac{1}{18} \neq 0$ stehen würde.

2. Für das gegebene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ (Abhängigkeiten von t werden in dieser Staatsexamensaufgabe unterdrückt) mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & t & 7 \\ 3 & t+2 & t+4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$; dabei ergibt sich

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & t & 7 & 3 \\ 3 & t+2 & t+4 & 4 \end{array}\right) \overset{\substack{\text{III}-2\,\text{I} \\ \text{II}-3\,\text{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & t-4 & 1 & 1 \\ 0 & t-4 & t-5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\text{III}-2\,\text{I} \\ \text{III}-\text{II}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & t-4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & t-6 & 0 \end{array}\right) = (A' \mid b'),$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

1. Fall: $t \in \mathbb{R} \setminus \{4, 6\}$. Dann ist $\; t-4 \neq 0 \;$ und $\; t-6 \neq 0$.
Dann ist

$$(A' \mid b') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & t-4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & t-6 & 0 \end{array}\right),$$

das LGS $A \cdot x = b$ ist also lösbar und es gibt keine freien Variablen, also ist es eindeutig lösbar, d.h. $|L| = 1$. Auflösen von unten nach oben ergibt

$$\begin{aligned} (t-6) \cdot x_3 &= 0 \implies & x_3 &= 0 \\ (t-4) \cdot x_2 &= 1 \implies & x_2 &= \frac{1}{t-4} \\ x_1 + 2\frac{1}{t-4} &= 1 \implies & x_1 &= 1 - \frac{2}{t-4} = \frac{t-6}{t-4}. \end{aligned}$$

Damit ist die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{t-6}{t-4} \\ \frac{1}{t-4} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, t \in \mathbb{R} \setminus \{4, 6\}\,.$$

2. Fall: $t = 4$. Dann ist $\; t-4 = 0 \;$ und $\; t-6-2$, also

$$(A' \mid b') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{III}+2\,\text{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right). \; \}$$

Hier steht „rechts“ keine 0

Das LGS $A \cdot x = b$ ist damit nicht lösbar, also ist die Lösungsmenge $L = \varnothing$.

3. Fall: $t = 6$. Dann ist $t - 4 = 2$ und $t - 6 = 0$, also

$$(A' \mid b') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \quad \}\ \text{Hier steht auch „rechts“ eine } 0$$

Damit ist das LGS $A \cdot x = b$ mehrdeutig lösbar, also $|L| = \infty$, mit x_3 als freie Variable. Auflösen von unten nach oben ergibt

$$\begin{aligned} & & x_3 &= \lambda \text{ frei} \\ 2x_2 + \lambda = 1 &\quad\Longrightarrow & x_2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ x_1 + 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda) + 3\lambda = 1 &\quad\Longrightarrow & x_1 &= -2\lambda. \end{aligned}$$

Damit ist die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -2\lambda \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Die übliche Regel (die linke Matrix muß so viele Spalten enthalten wie die rechte Matrix Zeilen) liefert die folgenden möglichen Produkte:

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 20 & 6 & -8 & -22 \\ 17 & 15 & 13 & 11 \\ -33 & -9 & 15 & 39 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -22 & 27 \\ -10 & 5 \\ -27 & 25 \\ 23 & -3 \end{pmatrix},$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 18 & 46 & 0 \\ 54 & 44 & -18 \end{pmatrix}.$$

4. a) Man erhält

$$Q \cdot L_4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad Q \cdot U_4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Einträge der Matrix Q sind also durch die Rechtsmultiplikation mit L_4 (bzw. mit U_4) um eine Spalte nach links (bzw. nach rechts) „gerutscht“, und die entstehenden Lücken wurden mit Nullen aufgefüllt.

b) Es ist zu vermuten, daß ganz allgemein Rechtsmultiplikation mit L_n (bzw. mit U_n) einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Einträge von A um eine Spalte nach links (nach rechts) „rutschen“ läßt.

c) Man erhält (die rot eingefärbten Einträge verdeutlichen, wie beispielsweise der linke obere Eintrag des Produktes zustandekommt)

$$A \cdot L_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ a_{m2} & a_{m3} & \dots & \dots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$A \cdot U_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & \dots & \dots & a_{1(n-1)} \\ 0 & a_{21} & \dots & \dots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{m1} & \dots & \dots & a_{m(n-1)} \end{pmatrix}$$

wodurch die Vermutung aus b) bewiesen ist.

Etwas kompakter aufgeschieben:
Nach 2.11c)1) ist, wie man auch sofort durch Nachrechnen sieht,

$$A \cdot e_j = a_j \quad (j\text{−te Spalte von } A), \quad j = 1, ..., n,$$

wobei $e_j \in \mathbb{R}^n$ den $j-$ten Einheitsvektor bezeichnet. Mit $L_n = (e_2\ e_3\ ...\ e_n\ 0_{\mathbb{R}^n}\ )$ wobei $0_{\mathbb{R}^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ den Nullvektor im $\mathbb{R}^n$, und $0_{\mathbb{R}^m} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ den Nullvektor im $\mathbb{R}^m$ bezeichnet, ist dann

$$A \cdot L_n = A \cdot (e_2\ e_3\ ...\ e_n\ 0_{\mathbb{R}^n}\ ) = (A{\cdot}e_2\ \ A{\cdot}e_3\ \ ...\ A{\cdot}e_n\ \ A{\cdot}0_{\mathbb{R}^n}\ ) = (a_2\ a_3\ ...\ a_n\ 0_{\mathbb{R}^m}\ )$$

Hier sieht man schön, wie die Multiplikation mit L_n von rechts die Spalten von A nach links verschiebt.

Ganz analog gilt für $U_n = (0_{\mathbb{R}^n}\ e_1\ e_2\ ...\ e_{n-1})$

$$A \cdot U_n = A \cdot (0_{\mathbb{R}^n}\ e_1\ e_2\ ...\ e_{n-1}) = (A{\cdot}0_{\mathbb{R}^n}\ \ A{\cdot}e_1\ \ A{\cdot}e_2\ \ ...\ A{\cdot}e_{n-1}\ ) = (0_{\mathbb{R}^m}\ a_1\ a_2\ ...\ a_{n-1}\ ).$$