MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 12
25.1.2019

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Lösungsvorschlag-

1. Wir betrachten die Koordinatenabbildung bzgl. der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 von V, also

$$p : V \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad p(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix},$$

wobei $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$ (das ist jetzt noch ein ganz allgemeines $v \in V$, nicht das v aus Teilaufgabe a)). Dann ist

$$p(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad p(u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad p(u_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und

$$p(w_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad p(w_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie für } \ v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 : \quad p(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Der Vektor $v \in V$ liegt genau dann in $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \subset V$, wenn sein Koordinatenvektor $p(v) \in \mathbb{R}^4$ in $\langle p(u_1), p(u_2), p(u_3) \rangle \subset \mathbb{R}^4$ liegt. Wegen

$$(p(u_1),\ p(u_2),\ p(u_3) \mid p(v)) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{IV}+\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{III}-\frac{3}{2}\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}+\frac{3}{4}\mathrm{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{array}\right)$$

ist $p(v)$ keine Linearkombination von $p(u_1)$, $p(u_2)$, $p(u_3)$, also $p(v) \notin \langle p(u_1), p(u_2), p(u_3) \rangle$ und damit auch $v \notin \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = U$.

[Natürlich kann man auch in V bleiben: Der Ansatz

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = v \qquad (*)$$

führt nach Einsetzen und Zusammenfassen auf die Gleichung

$$(\lambda_1 - \lambda_3)v_1 + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)v_2 + (-\lambda_1 + 3\lambda_2)v_3 + (-\lambda_1 + 4\lambda_3)v_4 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4,$$

und diese wiederum, weil v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis von V ist, auf das LGS

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & 1 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 1 \\ -\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & & & = & 1 \\ -\lambda_1 & & & + & 4\lambda_3 & = & 1 \end{array}\right\} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

was mit dem von oben identisch ist. Da es nicht lösbar ist. gibt es keine $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $(*)$, also ist $v \notin \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = U$.]

b) Wir bestimmen nun $p(U) \cap p(W)$:
Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^4$ liegt genau dann im Durchschnitt $p(U) \cap p(W)$, wenn er sowohl Linearkombination von $p(u_1), p(u_2), p(u_3)$ als auch Linearkombination von $p(w_1), p(w_2)$ ist. Also

$$\begin{aligned} x \in p(U) \cap p(W) \iff & \ \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \ \text{ mit} \\ & \qquad \lambda_1 \cdot p(u_1) + \lambda_2 \cdot p(u_2) + \lambda_3 p(u_3) = x = \mu_1 \cdot p(w_1) + \mu_2 \cdot p(w_2) \\ \iff & \ \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \ \text{ mit} \\ & \qquad \lambda_1 p(u_1) + \lambda_2 p(u_2) + \lambda_3 p(u_3) + \mu_1(-p(w_1)) + \mu_2(-p(w_2)) = 0 \\ & \quad \text{und} \quad x = \lambda_1 \cdot p(u_1) + \lambda_2 \cdot p(u_2) + \lambda_3 \cdot p(u_3) = \mu_1 \cdot p(w_1) + \mu_2 \cdot p(w_2) \end{aligned}$$

Wir müssen also das homogene LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen. Die Lösung dieses homogenen LGS erhalten wir nach elementaren Zeilenumformungen. Wegen

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{IV}+\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}-3\,\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{IV}+\frac{3}{4}\,\mathrm{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{array}\right)$$

erhält man durch Auflösen von unten her

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{frei} \\ \mu_1 &= -3\alpha \\ \lambda_3 &= -\alpha \\ \lambda_2 &= -\alpha \\ \lambda_1 &= -3\alpha; \end{aligned}$$

also ist die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\alpha \\ -\alpha \\ -\alpha \\ -3\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Damit ist

$$x \in p(U) \cap p(W) \iff x = \mu_1 p(w_1) + \mu_2 p(w_2) = -3\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Es ist demnach

$$p(U \cap W) = p(U) \cap p(W) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\dim p(U \cap W) = 1$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $p(U \cap W)$, also ist nach 5.4 auch $\dim(U \cap W) = 1$ und

$$p^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -2v_1 - 6v_2 + 0v_3 - v_4 = -2v_1 - 6v_2 - v_4$$

eine Basis von $U \cap W$.

c) Es ist offensichtlich $\dim W = 2$, und die Rechnungen in a) zeigen, daß

$$\dim\langle p(u_1), p(u_2), p(u_3)\rangle = 3,$$

weshalb auch $\dim U = 3$ ist.
Wir ergänzen nun unsere gefundene Basis $z := -2v_1 - 6v_2 - v_4$ von $U \cap W$ mit z.B. u_1, u_2 zu einer Basis z, u_1, u_2 von U, und mit z.B. w_1 zu einer Basis z, w_1 von W. Nach Vorlesung (5.20) ist dann

$$z, u_1, u_2, w_1$$

eine Basis von $U + W$. Wir müssen dazu nur noch zeigen, daß z, u_1, u_2 eine Basis von U und z, w_1 eine Basis von W ist. Weil z, w_1 offenlichtlich linear unabhängig sind und $\dim W = 2$, ist letzteres klar.
Da $\dim U = 3$, ist nur zu zeigen, daß z, u_1, u_2 linear unabhängig sind. Wir verwenden dazu

wieder die Koordinatenvektoren: Es ist

$$(p(u_1)\ p(u_2)\ p(z)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -6 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{IV}+\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{III}-\frac{3}{2}\mathrm{II}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{IV}+\frac{1}{2}\mathrm{III}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hieraus sieht man, daß $p(z), p(u_1), p(u_2) \in \mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind, also sind auch $z, u_1, u_2 \in V$ linear unabhängig, und damit eine Basis von U.

Bemerkung: *Wegen*

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 3 + 2 - 1 = 4 = \dim V$$

und $U + W \subset V$ gilt $U + W = V$. Damit können wir die Basis $z := -2v_1 - 6v_2 - v_4$ von $U \cap W$ auch mit 3 der Vektoren der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 von V zu einer Basis von $U + W = V$ ergänzen. Man zeigt nun sofort, daß z.B.

$$z, v_1, v_2, v_3$$

linear unabhängig, also eine Basis von $U + W$ sind.

2. a) Wir zeigen, daß $p_1, p_2, p_3 \in V = \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ linear unabhängig sind:
Seien dazu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0$ (z.z. ist: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$)
Es ist

$$\begin{aligned} &\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0 \\ &\iff \lambda_1 \cdot (X^3 - 1) + \lambda_2 \cdot (X^2 - X) + \lambda_3 (X^3 - X^2) = 0 \\ &\iff (-\lambda_1)1 + (-\lambda_2)X + (\lambda_2 - \lambda_3)X^2 + (\lambda_1 + \lambda_3)\,X^3 = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & & & & & = & 0 \\ & & -\lambda_2 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right\} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

Also sind p_1, p_2, p_3 linear unabhängig, und wegen $U = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ auch eine Basis von U; also ist $\dim U = 3$.

b) Sei W die Menge aller Polynome aus $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$, die eine Nullstelle bei 1 besitzen, also

$$W = \{p \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0\}.$$

Dann ist W ein UVR von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$, denn:

- Es ist $W \neq \varnothing$, da das Nullpolynom in W liegt. $\checkmark$
- Seien $p, q \in W$. Dann ist $(p+q)(1) = p(1) + q(1) = 0 + 0 = 0$, also $p + q \in W$. $\checkmark$
- Seien $p \in W, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $(\lambda p)(1) = \lambda p(1) = \lambda \cdot 0 = 0$, also $\lambda\, p \in W$. $\checkmark$

Nun ist offensichtlich 1 eine Nullstelle von p_1, p_2 und p_3, also gilt $p_1, p_2, p_3 \in W$. Da $W \subset \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ UVR, folgt

$$U = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle \subset W \subset \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}),$$

also

$$3 = \dim U \leq \dim W \leq \dim \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) = 4.$$

Damit ist $\dim W \in \{3, 4\}$. Es kann nicht $\dim W = 4$ gelten, weil sonst wäre nach 5.16 $W = \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$, also hätte jedes Polynom vom Grad kleiner gleich 3 in 1 eine Nullstelle, was nicht der Fall ist.
Also ist $\dim W = 3 = \dim U$. Da $U \subset W$ folgt mit 5.16, daß $U = W$, was zu zeigen war.

c) Wir wählen $p_4 := X^3$, und zeigen, daß $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ linear unabhängig sind. Da $\dim \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) = 4$, ist p_1, p_2, p_3, p_4 dann eine Basis von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$.
Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 + \lambda_4 p_4 = 0$ (z.z. ist: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$)
Es ist

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 + \lambda_4 p_4 = 0 \\
&\iff \lambda_1 \cdot (X^3 - 1) + \lambda_2 \cdot (X^2 - X) + \lambda_3 (X^3 - X^2) + \lambda_4 X^3 = 0 \\
&\iff (-\lambda_1) 1 + (-\lambda_2) X + (\lambda_2 - \lambda_3) X^2 + (\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4) X^3 = 0 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl}
-\lambda_1 & & & & & & & = & 0 \\
& & -\lambda_2 & & & & & = & 0 \\
& & \lambda_2 & - & \lambda_3 & & & = & 0 \\
\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0
\end{array} \right\} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0
\end{aligned}$$

Also sind p_1, p_2, p_3, p_4 linear unabhängig.

3. Sei V ein Vektorraum der Dimension $\dim(V) = 6$ sowie U und W Unterräume von V der Dimensionen $\dim(U) = 3$ und $\dim(W) = 4$. Wegen $U \cap W \subset U$ gilt zunächst

$$\dim(U \cap W) \leq \dim(U) = 3;$$

wegen $U + W \subset V$ ist

$$\dim(U + W) \leq \dim(V) = 6,$$

und unter Verwendung der Dimensionsformel für UVR ergibt sich dann

$$\dim(U \cap W) = \underbrace{\dim(U)}_{=3} + \underbrace{\dim(W)}_{=4} - \underbrace{\dim(U + W)}_{\leq 6} \geq 3 + 4 - 6 = 1.$$

Zusammenfassend erhalten wir also

$$\dim(U \cap W) \in \{1,\ 2,\ 3\}$$

und haben noch nachzuweisen, daß diese drei Möglichkeiten auch tatsächlich eintreten. Sei dazu $e_1, \ldots, e_6$ die Basis der Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^6$:

- Für $U = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ und $W = \langle e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$ ist $U \cap W = \langle e_3 \rangle$ und damit $\dim(U \cap W) = 1$.
- Für $U = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ und $W = \langle e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle$ ist $U \cap W = \langle e_2, e_3 \rangle$ und damit $\dim(U \cap W) = 2$.
- Für $U = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ und $W = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ ist $U \cap W = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ und damit $\dim(U \cap W) = 3$.

4. Es ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ -7 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Der Rang einer Matrix ändert sich nicht unter elementaren Zeilenumformungen; bei einer Matrix in Zeilenstufenform stimmt er mit der Anzahl der von Nullzeile verschiedenen Zeilen überein. Wegen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{III}-\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-2\,\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \overset{\substack{(-\frac{1}{3})\cdot\mathrm{III} \\ (-\frac{1}{4})\cdot\mathrm{II}}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist daher $\mathrm{Rang}(A) = 2$, und wegen

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}-2\,\mathrm{I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}-5\,\mathrm{II}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\mathrm{Rang}(B) = 2$. Des weiteren erhält man wegen

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ -7 & -7 & 0 \end{pmatrix} \overset{(\frac{1}{8}\cdot\mathrm{I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ -7 & -7 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{III}+7\,\mathrm{I} \\ \mathrm{II}+4\,\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zum einen $\mathrm{Rang}(A \cdot B) = 1$ und wegen

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{III}-7\,\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}-2\,\mathrm{II}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zum anderen $\mathrm{Rang}(B \cdot A) = 2$; es gilt hier also $\mathrm{Rang}(A \cdot B) \neq \mathrm{Rang}(B \cdot A)$.