MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 11
18.1.2019

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Lösungsvorschlag-

1. Wir untersuchen, ob v_1, v_2, v_3, v_4 linear unabhängig sind und betrachten dazu für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 + \lambda_4 \cdot v_4 = 0,$$

also das durch $(A \mid 0)$ gegebene homogene LGS mit

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Wir bringen die Matrix A auf ZSF (und lösen so das homogene LGS); es ist

$$A \overset{\text{III}-\text{I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{IV}-\text{II}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{IV}-3\,\text{I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

An der ZSF erkennen wir, daß v_1, v_2, v_3, v_4 linear abhängig sind, und es ist $v_4 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Denn beim Lösen des homogenen LGS ist die vierte Variable $\lambda_4 \in \mathbb{R}$ frei; wählt man also z.B. $\lambda_4 = 1$, so ergibt sich $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_1 = -1$, es ist also $-v_1 - v_2 + v_3 + v_4 = 0$, also $v_4 = v_1 + v_2 - v_3$.
Ebenfalls erkennt man, daß v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, denn wie man aus der ZSF sieht, folgt aus $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0$, daß $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Nach 5.14 können wir die linear unabhängigen Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ durch einen den Einheitsvektoren $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathbb{R}^4$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzen. Wir probieren es mit e_4 und untersuchen, ob v_1, v_2, v_3, e_4 linear unabhängig sind. Wie oben, betrachten wir dazu die Matrix $B := \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & e_4 \end{pmatrix}$, und bringen diese auf ZSF. Es ergibt sich (mit denselben EZUs wie oben)

$$B \overset{\text{III}-\text{I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{IV}-\text{II}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{IV}-3\,\text{I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also sind v_1, v_2, v_3, v_4 linear unabhängig, und damit (wegen $\dim \mathbb{R}^4 = 4$) eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

[Wir können sogar **alle** Vektoren $b \in \mathbb{R}^4$ angeben, mit denen sich v_1, v_2, v_3 zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzen läßt: Es gilt nämlich (da bereits v_1, v_2, v_3 linear unabhängig)

$$\begin{aligned} v_1, v_2, v_3, b \quad \text{linear unabhängig} \quad &\iff \quad b \notin \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \\ &\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \quad \text{ist unlösbar.} \end{aligned}$$

Es ist nun (mit denselben EZUs wie oben)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 \\ 1 & 1 & 2 & b_3 \\ 0 & -1 & -2 & b_4 \end{array}\right) \overset{\text{III}-\text{I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & -1 & b_3-b_1 \\ 0 & -1 & -2 & b_4 \end{array}\right) \overset{\text{IV}-\text{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & -1 & b_3-b_1 \\ 0 & 0 & -3 & b_4-b_2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{IV}-3\,\text{I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & -1 & b_3-b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_4-b_2-3\,(b_3-b_1) \end{array}\right)$$

Also ist v_1, v_2, v_3 mit allen $b \in \mathbb{R}^4$, dessen Komponenten $b_4 - b_2 - 3b_3 + 3b_1 \neq 0$ erfüllen, zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzbar, z.B. also durch e_4 (aber auch durch e_3 oder e_2 oder e_1).

2. a) <u>ohne 5.4; direktes Rechnen in $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$</u>

Es ist $U = \langle A_1, A_2, A_3\rangle$, und damit bilden A_1, A_2, A_3 ein Erzeugendensystem von U. Wir untersuchen, ob A_1, A_2, A_3 linear unabhängig.
Seien dazu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = 0$. Dann ist

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 4\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 3\lambda_2 & & & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & + & 7\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right\} \iff \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen dieses homogene LGS durch elementare Zeilenumformungen. Wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\text{IV}+\text{I} \\ \text{III}-\text{I} \\ \text{II}-\text{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\text{IV}+4\,\text{II} \\ \text{III}-\frac{1}{2}\,\text{II}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

An der ZSF erkennen wir, daß A_1, A_2, A_3 linear abhängig sind, und es ist $A_3 \in \langle A_1, A_2, A_3\rangle$. Denn beim Lösen des homogenen LGS ist die dritte Variable $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ frei; wählt man also z.B. $\lambda_3 = 1$, so ergibt sich $\lambda_2 = -1$, $\lambda_1 = 3$, es ist also $3A_1 - A_2 + A_3 = 0$, also $A_3 = A_2 - 3A_1$.
Ebenfalls erkennt man, daß A_1, A_2 linear unabhängig sind, also ist A_1, A_2 eine Basis von U, und damit ist $\dim U = 2$.

Es ist $W = \langle B_1, B_2\rangle$, und damit bilden B_1, B_2 ein Erzeugendensystem von W. Man sieht sofort (da B_1 kein Vielfaches von B_2 und auch nicht umgekehrt), daß B_1, B_2 linear unabhängig sind, also ist B_1, B_2 eine Basis von W, und damit ist auch $\dim W = 2$.

b) Wir bestimmen nun $U \cap W$:
Ein Vektor $C \in V$ liegt genau dann im Durchschnitt $U \cap W$, wenn er sowohl Linearkombination von A_1, A_2 als auch Linearkombination von B_1, B_2 ist. Also

$$\begin{aligned} C \in U \cap W &\iff \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } \quad \lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 = C = \mu_1 \cdot B_1 + \mu_2 \cdot B_2 \\ &\iff \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } \quad \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \mu_1(-B_1) + \mu_2(-B_2) = 0 \\ &\qquad\qquad \text{und} \quad C = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \mu_1(-B_1) + \mu_2(-B_2) = 0\\
\iff &\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\\
\iff &\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & + & 4\lambda_2 & + & \mu_1 & - & \mu_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \mu_1 & - & \mu_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 3\lambda_2 & - & \mu_1 & - & 2\mu_2 & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & + & 2\mu_1 & - & 4\mu_2 & = & 0 \end{array} \right.\\
\iff &\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die Lösung dieses homogenen LGS erhalten wir nach elementaren Zeilenumformungen. Wegen

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{IV}-\mathrm{I}\\ \mathrm{III}-\mathrm{I}\\ \mathrm{II}-\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{IV}+4\,\mathrm{II}\\ \mathrm{III}-\frac{1}{2}\,\mathrm{II}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{IV}-5\,\mathrm{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

erhält man durch Auflösen von unten her

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{frei}\\
\mu_1 &= -\alpha\\
\lambda_2 &= \alpha\\
\lambda_1 &= -2\alpha;
\end{aligned}$$

also ist die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
C \in U \cap W \quad \iff \quad C &= \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 = -\alpha B_1 + \alpha B_2 = \alpha(-B_1 + B_2) = \alpha \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\\
&= \alpha \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Es ist demnach

$$U \cap W = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Damit besteht $U \cap W$ aus allen Vielfachen der Matrix $C := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, also ist $\dim(U \cap W) = 1$ und $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ ist eine Basis von $U \cap W$.

mit 5.4; Rechnen in $\mathbb{R}^4$

Wir betrachten die Koordinatenabblidung bzgl. der Basis

$$E_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

von $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, also

$$p : V \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad p(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } A = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 + \lambda_4 E_4.$$

[Damit verlagern wir das ganze Problem in den $\mathbb{R}^4$, betrachten also
$p(A_1), p(A_2), p(A_3), p(B_1), p(B_2) \in \mathbb{R}^4$ statt $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 \in V$,
$p(U) = \langle p(A_1), p(A_2), p(A_3)\rangle \subset \mathbb{R}^4$ statt $U = \langle A_1, A_2, A_3\rangle \subset V$,
$p(W) = \langle p(B_1), p(B_2)\rangle \subset \mathbb{R}^4$ statt $W = \langle B_1, B_2\rangle \subset V$, und
$p(U \cap W) = p(U) \cap p(W) \subset \mathbb{R}^4$ statt $U \cap W \subset V$.]

Es ist

$$p(A_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p(A_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad p(A_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad p(B_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad p(B_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Um zu sehen, ob $p(A_1), p(A_2), p(A_3) \in \mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind, stellen wir die Vektoren zu einer Matrix

$$M := (p(A_1)\ p(A_2)\ p(A_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$$

zusammen und bringen diese auf Zeilenstufenform (wir lösen damit das homogene lineare Gleichungssystem $M \cdot x = 0$; dieses ist übrigens identisch mit dem von oben!). Es ist

$$(M \mid 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{s.o.}}{\curvearrowright} \dots \overset{\text{s.o.}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit sind die Spalten $p(A_1)$, $p(A_2)$, $p(A_2)$ von M linear abhängig und es ist mit den üblichen Argumenten $p(U) = \langle p(A_1), p(A_2), p(A_3)\rangle = \langle p(A_1), p(A_2)\rangle$ und $p(A_1), p(A_2)$ sind linear unabhängig, also ist $\dim p(U) = 2$ und $p(A_1), p(A_2)$ bilden eine Basis von $p(U)$ Folglich ist nach 5.4 auch $\dim U = 2$ und die Vektoren A_1, A_2 bilden eine Basis von U.

Offensichtlich sind $p(B_1)$, $p(B_2)$ linear unabhängig; folglich sind nach 5.4 auch die Vektoren B_1, B_2 linear unabhängig und damit eine Basis des Unterraums $W = \langle B_1, B_2\rangle$, so daß $\dim(W) = 2$.

Wir bestimmen nun $p(U) \cap p(W)$:

Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^4$ liegt genau dann im Durchschnitt $p(U) \cap p(W)$, wenn er sowohl Linearkombination von $p(A_1), p(A_2)$ als auch Linearkombination von $p(B_1), p(B_2)$ ist. Also

$$\begin{aligned}
x \in p(U) \cap p(W) \iff\ & \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \ \text{ mit} \\
& \qquad \lambda_1 \cdot p(A_1) + \lambda_2 \cdot p(A_2) = x = \mu_1 \cdot p(B_1) + \mu_2 \cdot p(B_2) \\
\iff\ & \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \ \text{ mit} \\
& \qquad \lambda_1 p(A_1) + \lambda_2 p(A_2) + \mu_1(-p(B_1)) + \mu_2(-p(B_2)) = 0 \\
& \qquad \text{und} \quad x = \lambda_1 \cdot p(A_1) + \lambda_2 \cdot p(A_2) = \mu_1 \cdot p(B_1) + \mu_2 \cdot p(B_2)
\end{aligned}$$

Wir müssen also das homogene LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen. Dieses LGS ist identisch mit dem von oben, also ist die Lösung

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \ \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
x \in p(U) \cap p(W) \quad \iff \quad x = \mu_1 p(B_1) + \mu_2 p(B_2) &= -\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Es ist demnach

$$p(U \cap W) = p(U) \cap p(W) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\dim p(U \cap W) = 1$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ eine Basis von $p(U \cap W)$, also ist nach 5.4 auch $\dim(U \cap W) = 1$ und

$$p^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $U \cap W$.

c) Nach der Dimensionsformel (5.19) für Untervektorräume ist

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \overset{a)}{=} 2 + 2 - 1 = 3.$$

d) Nach b) ist $C := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ eine Basis von $U \cap W$. Wir ergänzen C mit A_1 zu einer Basis C, A_1 von U (es ist $\dim U = 2$ und C, A_1 l.u.), und mit B_1 zu einer Basis C, B_1 von W (es ist $\dim W = 2$ und C, B_1 l.u.). Nach (5.20) ist dann automatisch

$$C, A_1, B_1, \quad \text{also} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $U + W$.

3. Es sei $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ der von den vier Vektoren

$$v_1 = a + b + c + d, \quad v_2 = b + c, \quad v_3 = c + d, \quad v_4 = a + b$$

aufgespannte Unterraum in einem reellen Vektorraum V; dabei sind die Vektoren a, b, c, d als linear unabhängig vorausgesetzt. Wegen

$$v_1 = (a + b) + (c + d) = v_4 + v_3 \in \langle v_2, v_3, v_4 \rangle$$

wird der Unterraum U bereits durch die drei Vektoren v_2, v_3, v_4 erzeugt; zum Nachweis ihrer linearen Unabhängigkeit seien λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot v_2 + \lambda_2 \cdot v_3 + \lambda_3 \cdot v_4 = 0_V,$$

also

$$\lambda_1 \cdot (b + c) + \lambda_2 \cdot (c + d) + \lambda_3 \cdot (a + b) = 0_V$$

und damit

$$\lambda_3 \cdot a + (\lambda_1 + \lambda_3) \cdot b + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot c + \lambda_2 \cdot d = 0_V.$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von a, b, c, d folgt daraus

$$\lambda_3 = 0, \qquad \lambda_1 + \lambda_3 = 0, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_2 = 0,$$

insgesamt also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$; folglich sind v_2, v_3, v_4 auch linear unabhängig und somit eine Basis von U. Für die Dimension von U ergibt sich demnach $\dim(U) = 3$.

4. Wegen $\dim V = n$ können wir (Basisergänzungssatz!) dem linear unabhängigen System

$$v_1, ..., v_{n-1}$$

einen Vektor v hinzufügen, so daß

$$v_1, ..., v_{n-1}, v$$

ebenfalls noch linear unabhängig, also wegen $\dim V = n$ eine Basis von V ist. Die Bedingung an v steht in 4.28 b) iv):

$$v_1, ..., v_{n-1}, v \quad \text{linear unabhängig} \quad \Longleftrightarrow \quad v \notin \langle v_1, ..., v_{n-1} \rangle. \qquad (*)$$

Wir zeigen, daß die rechte Seite von $(*)$ für wenigstens ein $v = b_i$ erfüllt ist.

Annahme: Für alle $i \in \{1, ..., n\}$ gilt $b_i \in \langle v_1, ..., v_{n-1} \rangle$.
Dann ist nach 4.16 c)

$$V = \langle b_1, ..., b_n \rangle \subset \langle v_1, ..., v_{n-1} \rangle \subset V,$$

also $V = \langle v_1, ..., v_{n-1} \rangle$, woraus $\dim V = n - 1$ folgt, ein Widerspruch zu $\dim V = n$.

Also gibt es ein b_j mit $v_1, ..., v_{n-1}, b_j$ ist Basis von V.