Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Lösungsvorschlag-

1. Ein Vektor $p \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ liegt genau dann im Durchschnitt $U \cap W$ der beiden Untervektorräume $U = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ und $W = \langle q_1, q_2 \rangle$, wenn er sowohl Linearkombination von p_1, p_2, p_3 als auch Linearkombination von q_1, q_2 ist. Also

$$\begin{aligned}
p \in U \cap W &\iff \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } \quad \lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 + \lambda_3 \cdot p_3 = v = \mu_1 \cdot q_1 + \mu_2 \cdot q_2 \\
&\iff \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } \quad \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 + \mu_1(-q_1) + \mu_2(-q_2) = 0 \\
&\qquad \text{mit } \quad p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = \mu_1 q_1 + \mu_2 q_2
\end{aligned}$$

Wir haben damit die Gleichung für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(1 + X^3) + \lambda_2(-1 - X + X^2 + 2X^3) + \lambda_3(2 + X + 2X^2) \\
&\quad + \mu_1(-1 - 2X - 2X^2) + \mu_2(1 + 3X + 2X^2 + X^3) = 0 \\
&\iff (\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 - \mu_1 + \mu_2) \cdot 1 + (-\lambda_2 + \lambda_3 - 2\mu_1 + 3\mu_2) \cdot X \\
&\qquad + (\lambda_2 + 2\lambda_3 - 2\mu_1 + 2\mu_2) \cdot X^2 + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \mu_2) \cdot X^3 = 0 \\
&\overset{1,X,X^2,X^3 \text{l.u.}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl}
\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & - & \mu_1 & + & \mu_2 & = & 0 \\
 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & - & 2\mu_1 & + & 3\mu_2 & = & 0 \\
 & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & - & 2\mu_1 & + & 2\mu_2 & = & 0 \\
\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & & & & & + & \mu_2 & = & 0
\end{array} \right. \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wir lösen dieses lineare Gleichungssystem. Wegen

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}-\mathrm{I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{IV}+3\,\mathrm{II} \\ \mathrm{III}+\mathrm{II}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{IV}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}-3\,\mathrm{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -22 & 0 \end{array}\right)$$

erhält man durch Auflösen von unten her

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{frei} \\
\mu_1 &= 2\alpha \\
\lambda_3 &= \alpha \\
\lambda_2 &= 0 \\
\lambda_1 &= -\alpha
\end{aligned}$$

also mit $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} p \in U \cap W \iff & p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = -\alpha p_1 + \alpha p_3 \\ \iff & p = \alpha(-p_1 + p_3) = \alpha(1 + X + 2X^2 + X^3). \end{aligned}$$

Es ist demnach

$$U \cap W = \mathbb{R} \cdot (-1 + X + 2X^2 + X^3),$$

weswegen etwa der Vektor $p = 1 + X + 2X^2 + X^3$ als Basis von $U \cap W$ gewählt werden kann.

2. a) Es ist $\dim \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) = n + 1$, deshalb können die n Vektoren

$$1 + x, \quad x + x^2, \quad x^2 + x^3, \quad \ldots \quad , \quad x^{n-1} + x^n$$

keine Basis von $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ bilden.

b) Gemäß 5.10 ist wegen $\dim \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) = 4$ nur zu zeigen, daß die 4 Vektoren

$$1, \quad x + 1, \quad x^2 + x + 1, \quad x^3 + x^2 + x + 1$$

linear unabhängig sind.
Seien dazu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (x + 1) + \lambda_3 \cdot (x^2 + x + 1) + \lambda_4 \cdot (x^3 + x^2 + x + 1) = 0. \tag{$*$}$$

Zu zeigen ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.
Es ist

$$(*) \iff (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \cdot 1 + (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \cdot x^2 + (\lambda_3 + \lambda_4) \cdot x^2 + \lambda_4 \cdot x^3 = 0$$

$$\overset{1,x,x^2,x^3 \text{ l.u.}}{\iff} \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & & & & & & \lambda_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

(die entscheidende Richtung ist "$\Longrightarrow$"). Also sind die angegebenen Vektoren linear unabhängig, also gemäß 5.10 eine Basis von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$.

3. Wir betrachten für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0,$$

also das durch $(A \mid 0)$ gegebene homogene LGS mit

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}.$$

Wir bringen die Matrix A auf ZSF (und lösen so das homogene LGS); es ist

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{IV}\leftrightarrow\mathrm{I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{IV}-6\,\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-5\,\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & -14 & 6 \\ 0 & -14 & 6 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{IV}-2\,\mathrm{II} \\ \mathrm{III}-2\,\mathrm{II}}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

An der ZSF erkennen wir, daß v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind, und es ist $v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle$. Denn beim Lösen des homogenen LGS ist die dritte Variable $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ frei; wählt man also z.B. $\lambda_3 = 1$, so ergibt sich $\lambda_2 = \frac{3}{7}$, $\lambda_1 = -\frac{2}{7}$, es ist also

$$-\frac{2}{7} \cdot v_1 + \frac{3}{7} \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = 0. \qquad (*)$$

An $(*)$ sieht man durch Auflösen nach v_3, daß

$$v_3 = \frac{2}{7} \cdot v_1 - \frac{3}{7} \cdot v_2, \qquad \text{also} \qquad v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Aber natürlich könnte man hier $(*)$ auch nach v_2 oder v_1 auflösen (weil der Koeffizient vor diesen v_1 und v_2 ebenfalls $\neq 0$ ist). Man erhält dann

$$v_2 = \frac{2}{3} \cdot v_1 - \frac{7}{3} \cdot v_3, \qquad \text{also} \qquad v_2 \in \langle v_1, v_3 \rangle,$$

und

$$v_1 = \frac{3}{2} \cdot v_2 + \frac{7}{2} \cdot v_3, \qquad \text{also} \qquad v_1 \in \langle v_2, v_3 \rangle.$$

In diesem Fall ist also nicht nur v_3 Linearkombination von v_1, v_2, sondern auch v_2 Linearkombination von v_1, v_3, und v_1 Linearkombination von v_2, v_3.

4. a) Gemäß 5.2 der Vorlesung sind n Vektoren im $\mathbb{R}^n$ (beidemale ist die Zahl n, das ist wesentlich!) genau dann linear unabhängig, wenn die aus ihnen gebildete quadratische Matrix invertierbar ist. Wir müssen also nur die Determinante der Matrix

$$A := (v_1 \;\; v_2 \;\; v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

berechnen und sehen, für welche $t \in \mathbb{R}$ diese $\neq 0$ ist. Es ist

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & t & 1 \\ t & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0+0+0) - (t^3+1+0) = -1 - t^3 = 0 \iff t^3 = -1 \iff t = -1,$$

also sind die drei Vektoren genau dann linear unabhängig, wenn $t \neq -1$ ist.

b) Für $t = 2$ sind nach a) die drei Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ l.u., also gemäß 5.2 eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Für $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ist

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 0 & b_3 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}-2\,\mathrm{I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & -4 & b_3 - 2b_1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}-\frac{1}{2}\,\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & b_3 - 2b_1 - \frac{1}{2}b_2 \end{array}\right)$$

<u>**Für $b = e_1$ haben wir damit:**</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -2 \end{array}\right), \quad \text{also als Lösung des LGS } \; Ax = e_1 \; \text{ dann:} \qquad x_3 = \frac{4}{9}, x_2 = -\frac{2}{9}, x_1 = \frac{1}{9}.$$

Damit ist
$$e_1 = \frac{1}{9}v_1 - \frac{2}{9}v_2 + \frac{4}{9}v_3,$$
also sind $\frac{1}{9}$, $-\frac{2}{9}$, $\frac{4}{9}$ die Koordinaten
und $\frac{1}{9}v_1$, $-\frac{2}{9}v_2$, $\frac{4}{9}v_3$ die Komponenten von e_1 bzgl. der Basis v_1, v_2, v_3 von $\mathbb{R}^3$.

Für $b = e_2$ haben wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right), \quad \text{also als Lösung des LGS } Ax = e_2 \text{ dann:} \quad x_3 = \frac{1}{9}, x_2 = \frac{4}{9}, x_1 = -\frac{2}{9}.$$

Damit ist
$$e_2 = -\frac{2}{9}v_1 + \frac{4}{9}v_2 + \frac{1}{9}v_3,$$
also sind $-\frac{2}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{9}$ die Koordinaten
und $-\frac{2}{9}v_1$, $\frac{4}{9}v_2$, $\frac{1}{9}v_3$ die Komponenten von e_2 bzgl. der Basis v_1, v_2, v_3 von $\mathbb{R}^3$.

Für $b = e_3$ haben wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 1 \end{array}\right), \quad \text{also als Lösung des LGS } Ax = e_3 \text{ dann:} \quad x_3 = -\frac{2}{9}, x_2 = \frac{1}{9}, x_1 = \frac{4}{9}.$$

Damit ist
$$e_3 = \frac{4}{9}v_1 + \frac{1}{9}v_2 - \frac{2}{9}v_3,$$
also sind $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{9}$, $-\frac{2}{9}$ die Koordinaten
und $\frac{4}{9}v_1$, $\frac{1}{9}v_2$, $-\frac{4}{9}v_3$ die Komponenten von e_3 bzgl. der Basis v_1, v_2, v_3 von $\mathbb{R}^3$.

c) Für $t = -1$ ist

$$(A \mid 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III+I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III+II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

das homogene LGS $A \cdot x = 0$ die Lösungsmenge
$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

also sind
$$\lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 + \lambda \cdot v_3 = 0 \qquad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R},$$
alle Darstellungen des Nullvektors als Linearkombination von v_1, v_2, v_3.