MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 1
26.10.2018

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I" -Lösungsvorschlag-

1. Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2\,x_3 & - & 3\,x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3\,x_3 & + & 3\,x_4 & = & 1 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$. Es ist

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{IV}-\mathrm{I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}+\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \} \text{ Hier steht auch „rechts" eine } 0 \end{array} = (A' \mid b').$$

Damit ist das LGS lösbar (also $L \neq \varnothing$) und x_3 eine freie Variable
(*denn: Die Matrix A' hat Zeilenstufenform mit einer Nullzeile als 4. Zeile. Da 4. Komponente von b' ebenfalls gleich 0 ist, ist das lineare Gleichungssystem lösbar. Da die Variable x_3 zum „hinteren Teil einer breiteren Stufe gehört", ist $x_3 = \lambda$ frei.*)
Wir lösen das LGS „von unten her":

$$\begin{array}{rcll} 1\,x_4 = 1 & \Longrightarrow & x_4 = 1 & \text{(dritte Zeile der Matrix)} \\ & & x_3 = \lambda \text{ frei} & \\ 1\,x_2 + 2\lambda - 3 = 0 & \Longrightarrow & x_2 = 3 - 2\lambda & \text{(zweite Zeile der Matrix)} \\ 1\,x_1 + 2(3 - 2\lambda) - \lambda = 1 & \Longrightarrow & x_1 = -5 + 5\lambda & \text{(erste Zeile der Matrix).} \end{array}$$

Folglich ist also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -5 + 5\,\lambda \\ 3 - 2\,\lambda \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des gegebenen linearen Gleichungssystems.

2. Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2\,x_1 & + & x_2 & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2\,x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & \alpha\,x_4 & = & \beta \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$ (eigentlich $(A_\alpha \mid b_\beta)$, wir unterdrücken hier aber die Abhängigkeiten von den Parametern). Es ist

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{III}-\frac{2}{3}\cdot\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}-\frac{3}{4}\cdot\mathrm{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - \frac{3}{4} & \beta \end{array}\right) = (A' \mid b')$$

Die Matrix A' liegt, egal welchen Wert α hat, in Zeilenstufenform vor; allerdings sieht die „Treppe“ unterschiedlich aus. Dies motiviert die folgende Fallunterscheidung:

<u>1. Fall:</u> $\alpha \neq \frac{3}{4}$, also $\alpha - \frac{3}{4} \neq 0$.
Hier ist

$$(A' \mid b') = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - \frac{3}{4} & \beta \end{array}\right),$$

also ist das LGS für alle $\beta \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar, also $|L_{\alpha,\beta}| = 1$.
(*denn: Die „Treppe“ von A' hat 4 Stufen, reicht also bis zur letzten (untersten) Zeile; A' hat also keine Nullzeile. Damit ist für alle $\beta \in \mathbb{R}$ das LGS lösbar. Da die Stufenbreiten alle einfach sind, und die „Treppe“ ganz links oben beginnt (1. Spalte von A' ist keine Nullspalte), ist das LGS eindeutig lösbar.*)

<u>2. Fall:</u> $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta \neq 0$.
Hier ist

$$(A' \mid b') = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right), \;\} \text{ Hier steht „rechts“ keine } 0$$

also hat das LGS keine Lösung, also $L_{\frac{3}{4},\beta} = \varnothing$.
(*Die 4. Zeile von A' ist eine Nullzeile, die „Treppe“ hat also nur 3 Stufen. Da die 4. Komponente von b' nicht 0 ist, besitzt das LGS keine Lösung.*)

<u>3. Fall:</u> $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = 0$.
Hier ist

$$(A' \mid b') = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \;\} \text{ Hier steht auch „rechts“ eine } 0$$

Das LGS ist in diesem Fall lösbar und x_4 ist eine freie Variable, also ist $|L_{\frac{3}{4},0}| = \infty$.

Das Auflösen von unten nach oben ergibt ergibt sich dann

$$\begin{aligned} & & x_4 &= \lambda \text{ frei} \\ \frac{4}{3}x_3 + \lambda = 0 &\quad\Longrightarrow & x_3 &= -\frac{3}{4}\lambda \\ \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{4}\lambda = 0 &\quad\Longrightarrow & x_2 &= \frac{1}{2}\lambda \\ 2\,x_1 + \frac{1}{2}\lambda = 0 &\quad\Longrightarrow & x_1 &= -\frac{1}{4}\lambda \quad . \end{aligned}$$

Folglich ist also

$$L_{\frac{3}{4},0} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\lambda \\ \frac{1}{2}\lambda \\ -\frac{3}{4}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des gegebenen linearen Gleichungssystems.

3. a) Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & s\,x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & s\,x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ s\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_s \mid b)$. Es ist

$$(A_s \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & s & 2 \\ 1 & s & 1 & -1 \\ s & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{\text{II}-\text{I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & s & 2 \\ 0 & s-1 & 1-s & -3 \\ s & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{III}-s\cdot\text{I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & s & 2 \\ 0 & s-1 & 1-s & -3 \\ 0 & 1-s & 1-s^2 & -1-2\,s \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{III}+\text{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & s & 2 \\ 0 & s-1 & 1-s & -3 \\ 0 & 0 & 2-s-s^2 & -4-2\,s \end{array}\right) = (A_s' \mid b_s').$$

Wegen

$$s - 1 = 0 \iff s = 1$$

und

$$2 - s - s^2 = (2+s)(1-s) = 0 \iff s = -2 \;\text{ oder }\; s = 1$$

legt dies die folgende Fallunterscheidung nahe:

1. Fall: $s \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, also $s - 1 \neq 0$ und $2 - s - s^2 = (2+s)(1-s) \neq 0$.
Dann ist

$$(A_s' \mid b_s') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & s & 2 \\ 0 & s-1 & 1-s & -3 \\ 0 & 0 & 2-s-s^2 & -4-2\,s \end{array}\right),$$

also ist das LGS eindeutig lösbar. Wir lösen von unten nach oben:

$$\begin{aligned} (2-s-s^2)\,x_3 = -4-2s \quad &\Longrightarrow \quad x_3 = \frac{-4-2s}{2-s-s^2} = \frac{-2(2+s)}{(2+s)(1-s)} = \frac{2}{s-1} \\ (s-1)\,x_2 + (1-s)\,\frac{2}{s-1} = -3 &\Longrightarrow \quad x_2 = \frac{1}{s-1}\,(-3+2) = -\frac{1}{s-1} \\ x_1 - \frac{1}{s-1} + s\,\frac{2}{s-1} = 2 &\Longrightarrow \quad x_1 = 2 + \frac{1}{s-1} - s\,\frac{2}{s-1} = -\frac{1}{s-1}, \end{aligned}$$

Damit ist

$$L_s = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{s-1} \\ -\frac{1}{s-1} \\ \frac{2}{s-1} \end{pmatrix} \right\}, \quad s \in \mathbb{R}\setminus\{-2, 1\},$$

die Lösungsmenge des gegebenen Gleichungssystems.

2. Fall: $s = -2$, also $s - 1 = 3$ und $2 - s - s^2 = 0$.
Dann ist

$$(A'_{-2} \mid b'_{-2}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \Big\} \text{Hier steht auch „rechts" eine } 0$$

also ist das LGS lösbar und x_3 ist eine freie Variable.
Mit $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ frei, ergibt sich $-3x_2 + 3\lambda = -3$, also $x_2 = \lambda + 1$, sowie $x_1 + (\lambda + 1) - 2\lambda = 2$, also $x_1 = \lambda + 1$, es ist also

$$L_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda + 1 \\ \lambda + 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des gegebenen linearen Gleichungssystems.

3. Fall: $s = 1$, also $s - 1 = 0$ und $2 - s - s^2 = 0$.
Dann ist

$$(A'_1 \mid b'_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \Big\} \text{Hier stehen „rechts" nicht lauter 0en}$$

Also ist, aufgrund des Widerspruchs in der zweiten (oder dritten) Zeile, das gegebene lineare Gleichungssystem nicht lösbar, es ist also $L_1 = \varnothing$.

4. Wir schreiben $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ und lösen das durch $(A \mid b)$ gegebene lineare Gleichungssystem durch elementare Zeilenumformungen.

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & b_2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & b_3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & b_4 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{IV}+\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \\ \mathrm{II}+\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3 - b_1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & b_4 + b_1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{IV}-\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_4 - b_2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{IV}-\mathrm{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 - b_3 - b_2 + b_1 \end{array}\right) = (A' \mid b'). \Big\} \text{Hier „rechts" } \neq 0\,?$$

a) Das Gleichungssystem ist genau dann unlösbar, wenn der Nullzeile der Zeilenstufenmatrix A' auf der rechten Seite eine Zahl $\neq 0$ gegenübersteht, wenn also $b_4 - b_3 - b_2 + b_1 \neq 0$ ist. Dies ist beispielsweise für

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der Fall.

b) Nein, ein solches b existiert nicht aufgrund der Zeilenstufenform A': Da $A`'$ eine „breitere“ Stufe besitzt, gilt für die Lösungsmenge L des LGS entweder $L = \varnothing$ (wenn $b_4 - b_3 - b_2 + b_1 \neq 0$, siehe a,) oder $|L| = \infty$ (da x_4 eine freie Variable ist).

c) Hierfür müssen wir nur noch in unserer schon erfolgten Rechnung die zu b_0 gehörigen Werte $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 1$ einsetzen, und erhalten damit

$$(A' \mid b') = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{Hier steht auch „rechts“ eine } 0 .$$

Hier erkennen wir, daß wir $x_4 = \lambda$ frei wählen können; das Auflösen von unten nach oben ergibt dann

$$\begin{aligned} x_4 &= \lambda, \\ x_3 &= -2x_4 = -2\lambda, \\ x_2 &= \frac{1}{2}(2 - x_3) = 1 + \lambda, \\ x_1 &= 1 - x_3 - 4x_2 = -3 - 2\lambda, \end{aligned}$$

also ist die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -3 - 2\lambda \\ 1 + \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$