MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 8
14.12.2018

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

1. *(Frühjahr 2011, Thema 1, Aufgabe 5)*

   Im Vektorraum der reellen Polynome seien die folgenden Teilmengen gegeben:

$$\begin{aligned} U_1 &= \big\{P \;:\; P(x) = a\,x^2 + b\,x + c \;\text{ mit }\; a,\, b,\, c \in \mathbb{R}\big\}\,, \\ U_2 &= \big\{P \;:\; P(x) = a\,x^2 + b\,x \;\text{ mit }\; a,\, b \in \mathbb{R}\big\}\,, \\ U_3 &= \{P \;:\; P(x) = 0 \;\text{ oder }\; \mathrm{grad}(P) \geq 2\}\,, \\ U_4 &= \big\{P \;:\; P(x) = a\,x^2 + b\,x + c \;\text{ mit }\; a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \;\text{ und }\; c \neq 0\big\}\,. \end{aligned}$$

   Überprüfen Sie, welche dieser Teilmengen einen linearen Unterraum *(= Untervektorraum)* bilden.

2. Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ seien die Teilmengen $U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ und $W = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3\}$ gegeben.

   a) Begründen Sie, daß U und W Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ sind.

   b) Bestimmen Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ mit $U \cap W = \mathbb{R} \cdot v$.

   c) Zeigen Sie, daß die drei Einheitsvektoren $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ in $U + W$ liegen.

3. Begründen Sie, daß die Menge

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & -5 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^5$$

   ein Untervektorraum ist und finden Sie $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^5$ mit $U =< v_1, v_2 >$.

4. Schreiben Sie den Untervektorraum

$$W = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^5.$$

   in der Form

$$W = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid A \cdot x = 0\}$$

   mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 5}$.

Abgabe bis 21.12.2018, 16:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).