MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 7
7.12.2018

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

1. In $\mathbb{R}^2$ seien die Untervektorräume

$$U = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad W = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Zeigen Sie, daß

$$U \cap W = \{0\} \qquad \text{und} \qquad U + W = \mathbb{R}^2.$$

2. Untersuchen Sie, bei welchen der folgenden Teilmengen es sich um Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ handelt:

   a) $U_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$

   b) $U_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 \geq 3\}$

   c) $U_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 2\,x_3\}$

   d) $U_4 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3^2 = x_1 \cdot x_2\}$

3. Untersuchen Sie für $n \geq 2$, ob

$$U = \big\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) = 0\big\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

4. Im reellen Vektorraum $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ aller reellen $n \times n$–Matrizen sind die Teilmengen

$$U = \big\{B \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid B^{\mathsf{T}} = B\big\} \qquad \text{und} \qquad W = \big\{B \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid B^{\mathsf{T}} = -B\big\}$$

gegeben.

   a) Zeigen Sie, daß U und W Untervektorräume von V sind.

   b) Zeigen Sie, daß für jede Matrix $A \in V$ zum einen $A + A^{\mathsf{T}} \in U$ und zum anderen $A - A^{\mathsf{T}} \in W$ gilt.

   c) Bestimmen Sie $U \cap W$ und $U + W$.
   Dabei ist $U + W = \{C + D \mid C \in U,\ D \in W\}$.

Abgabe bis 14.12.2018, 16:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).